

אלגברה לינארית להנדסות

רשימות תרגול, הסברים ופתרונות



עריכה והוראה: חן גדי
לאתר הקורסים, לחומרים ולשאלות

<https://chengadi.science>

ייתכנו טעויות, אי-דיוקים, השמטות או ניסוחים לא מושלמים.
להערות, לתיקונים ולשאלות השתמשו באתר המקושר למעלה.
החומר המחייב הוא החומר המועבר בהרצאות ובהודעות הרשמיות של הקורס.

תודה גדולה לכל האנשים שתרמו לי בכל דרך, בהערות, בתיקונים, בהסברים, ברעיונות, בתמיכה לאורך הדרך, וגם לכל מי שלימד אותי, המליץ לי, שלח תבניות, שיתף תרגילים או סייע בכל צורה אחרת.

תוכן העניינים

1	איך עובדים עם הרשימות?
3	1 תרגול 1: מספרים מרוכבים ואינדוקציה
13	2 תרגול 2: שיטות הוכחה, קבוצות ושדות
20	3 תרגול 3: מערכות לינאריות ותתי מרחבים
34	4 תרגול 4: תלות לינארית, פרישה וסכומי מרחבים
45	5 תרגול 5: פעולות במטריצות, בסיס וממד
57	6 תרגול 6: בסיסים, הפיכות ומטריצות אלמנטריות
73	7 תרגול 7: דרגה, מרחבי שורות ועמודות ומערכות מדידה
95	8 תרגול 8: העתקות לינאריות וקואורדינטות
110	9 תרגול 9: העתקות לינאריות וייצוג מטריצוני
124	10 תרגול 10: דמיון מטריצות וטרמיננטות
138	11 תרגול 11: ערכים עצמיים ולכסון
161	12 תרגול 12: מכפלות פנימיות, אורתוגונליות והיטלים
178	13 תרגול 13: גרם שמידט ולכסון אורתוגונלי
192	א' לוגיקה ושיטות הוכחה

איך עובדים עם הרשימות?

עיקרון מנחה

אלגברה לינארית היא שפה לתיאור מערכות: אילוצים, אותות, תמונות, מודלים חישוביים והעתקות בין מרחבים. הרשימות מיועדות לכלל תלמידי ההנדסות. הדוגמאות ההנדסיות נועדו לתת משמעות לחישוב, וההגדרות וההוכחות מספקות את התנאים שבהם הוא תקף.

מסלול הלמידה

- 1. לפני התרגול:** עברו על ההגדרות ועל הדוגמאות הבסיסיות מההרצאה. כתבו מה נתון, באיזה מרחב עובדים ומהו השדה.
- 2. במהלך הפתרון:** נסו לפתור את השאלה לפני קריאת הפתרון. נמקו כל מעבר: פעולת שורה, שימוש במשפט או בחירת בסיס.
- 3. אחרי החישוב:** בדקו את התוצאה בהצבה ובדקו ממדים, מקרי קצה ומשמעות גאומטרית. איור מסייע להבנה אך אינו מחליף הוכחה.
- 4. בסיום הנושא:** סכמו הגדרה, משפט מרכזי, דוגמה ונגד-דוגמה. הפרידו בין תנאי הכרחי לתנאי מספיק.

מה מסמנות התיבות?

הגדרה פורמלית

הגדרה פורמלית: מושגים, סימונים ותנאי שימוש. חשוב לקרוא גם את ההנחות.

תזכורת (מההרצאה)

תזכורת מההרצאה: עובדות וכלים שעליהם נשענים הפתרונות.

הערה פורמלית

הערה פורמלית: דיוק בהנחות, אזהרה מטעות נפוצה או הסבר למקרה קצה.

דוגמה 0.1.

דוגמה: המחשה קצרה של מושג. תרגיל פתור מוצג בתיבה נפרדת, ללא כותרת פרטנית ועם הפרדה בין השאלה לפתרון.

האתר והודעות הקורס

חומרי הלימוד, הקישורים להקלטות, העדכונים והשאלות מרוכזים דרך **האתר של חן גדי**. אפשר להגיע אליו גם באמצעות הכתובת:

<https://chengadi.science>

החומר המחייב, מועדי ההגשה, הרכב הציון ושעות הקבלה נקבעים לפי הסילבוס וההודעות הרשמיות של הקורס. בחוברת המטלות נשמרה החלוקה המקורית לשאלות להגשה ולתרגול עצמי; יש לבדוק באתר אילו שאלות מיועדות להגשה בפועל.

סימונים וקונבנציות

- $\mathbb{F}$ מסמן שדה; $\mathbb{R}$ ו- $\mathbb{C}$ הם השדות הממשי והמרוכב. כאשר טענה זקוקה להנחה על השדה, יש לציין אותה.
- רשימת איברי בסיס היא רשימה סדורה. עמודה מספר j במטריצה מייצגת מכילה את קואורדינטות תמונת איבר הבסיס j .
- במרחב מכפלה פנימית מרוכב נשתמש בקונבנציה של **לינאריות במשתנה הראשון** וצמוד-לינאריות בשני. בפרט $\langle x, y \rangle = \sum_j x_j \overline{y_j}$ במכפלה הסטנדרטית.
- עבור $A \in M_n(\mathbb{F})$ נסמן $p_A(t) = \det(tI - A)$. אפשר להשתמש גם ב- $\det(A - tI)$, אך יש לעקוב אחר גורם הסימן $(-1)^n$.

הערה פורמלית

הרשימות כוללות פתרונות והרחבות ללמידה. ייתכנו טעויות גם לאחר בדיקה; לתיקונים ולהצעות השתמשו באתר. אין בחוברת זו קביעה חדשה של מדיניות קורס.

תרגול 1: מספרים מרוכבים ואינדוקציה

עיקרון מנחה

מטרות התרגול. נלמד לעבור בין הצגה קרטזית להצגה קוטבית, לחשב חזקות ושורשים ולפרש פעולות במישור המרוכב. בסיום ננסח הוכחה באינדוקציה, תוך ציון תחום התקפות של הטענה.

1.1 איך עובדים עם הרשימות?

הרשימות מיועדות לסטודנטיות ולסטודנטים מכל תחומי ההנדסה. הן משלבות הגדרות, רעיונות מנחים, דוגמאות ופתרונות מפורטים.

- חומרי הקורס, עדכונים ושאלות ירוכזו באתר: [האתר של חן גדי](#).
- הסילבוס הרשמי והודעות סגל הקורס הם המקור המחייב לתוכן, למטלות, למועדים ולהרכב הציון. הרשימות אינן קובעות מדיניות הגשה או נוכחות.
- לפני התרגול מומלץ לעבור על ההגדרות; בזמן הלמידה לנסות כל תרגיל לפני פתיחת הפתרון; ובסיום לבדוק את התוצאה בהצבה או בדוגמה פשוטה.
- שאלות על החומר כדאי לנסח בקצרה, לצרף את השאלה ואת ניסיון הפתרון, ולציין באיזה שלב נוצר הקושי. שאלות לוגיסטיות מועברות דרך האתר בציון הקורס.

עיקרון מנחה

הרגל עבודה. בכל פתרון כתבו: מה נתון, מה נדרש, באיזו הגדרה או טענה משתמשים, ולמה מותר לבצע כל פעולה. חישוב נכון והסבר ברור משלימים זה את זה.

1.2 מספרים מרוכבים - הצגה קרטזית

הגדרה פורמלית

היחידה המדומה i מקיימת $i^2 = -1$.
הביטוי $z = x + iy$ הוא מספר מרוכב, כאשר $x, y \in \mathbb{R}$.

1. אם $\operatorname{Re}(z) = x = 0$ אז z מדומה טהור.

2. אם $\operatorname{Im}(z) = y = 0$ אז z ממשי.

פתרו מעל $\mathbb{C}$ את המשוואה $z^2 - 4z + 13 = 0$. כתבו פירוק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{C}$, וקבעו אם קיים פירוק כזה מעל $\mathbb{R}$.

פתרון

הדיסקרימיננטה היא $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 16 - 52 = -36$. לכן

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i.$$

מכאן

$$z^2 - 4z + 13 = (z - (2 + 3i))(z - (2 - 3i)).$$

זהו פירוק מעל $\mathbb{C}$. מעל $\mathbb{R}$ הדיסקרימיננטה שלילית, ולכן אין שורש ממשי ואין פירוק לשני גורמים לינאריים ממשיים.

הגדרה פורמלית

• **צמוד:** ל- $z = x + iy$ נסמן $z^* := x - iy$.

• **ערך מוחלט:** $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$.

• **מספר הופכי:** עבור $z \neq 0$: $z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}$.

הוכיחו: **א.** $\operatorname{Re} z = \frac{z + z^*}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z - z^*}{2i}$. **ב.** $|z| \geq \operatorname{Re} z$, $|z| \geq \operatorname{Im} z$ לכל $z \in \mathbb{C}$. **ג.** (בבית) $(z^*)^* = z$. **ד.** (בבית) אם z ממשי אז $z^* = z$.

פתרון

נסמן $z = x + iy$ אז

$$\frac{z + z^*}{2} = x = \operatorname{Re} z, \quad \frac{z - z^*}{2i} = y = \operatorname{Im} z,$$

וכן

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |x| \geq x = \operatorname{Re} z, \quad |z| \geq |y| \geq y = \operatorname{Im} z.$$

(ג) $(z^*)^* = (x - iy)^* = x + iy = z$

(ד) אם z ממשי, אז $y = 0$, ולכן $z^* = x - 0i = x = z$

1.2.1 תכונות שימושיות

$$1. |z| = |z^*|$$

$$2. z \cdot z^* = |z|^2 \quad (\text{כפל בצמוד נותן ממשי})$$

$$3. |zw| = |z| |w|$$

$$4. (zw)^* = z^* w^*$$

הוכיחו עבור $z \neq 0$: $(z^{-1})^* = (z^*)^{-1}$.

פתרון

מכיוון ש- $z \neq 0$, גם $z^* \neq 0$ ו- $|z|^2 > 0$. לפי נוסחת ההופכי,

$$(z^{-1})^* = \left(\frac{z^*}{|z|^2} \right)^* = \frac{z}{|z|^2}, \quad (z^*)^{-1} = \frac{(z^*)^*}{|z^*|^2} = \frac{z}{|z|^2}.$$

שני האגפים שווים לאותו ביטוי, ולכן $(z^{-1})^* = (z^*)^{-1}$.

1.3 הצגה קוטבית/פולרית

1.3.1 מעבר בין הצגה קרטזית לפולרית

הגדרה פורמלית

לכל $z = x + iy \neq 0$ קיימים $r = |z| > 0$ וזווית θ כך ש-

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

להפך, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. כאשר $x \neq 0$ מתקיים $\tan \theta = y/x$, אך יחס זה לבדו אינו קובע את הרביע. **הערות:**

- הזווית נקבעת עד כדי תוספת $2\pi k$, כאשר $k \in \mathbb{Z}$. עבור $z = 0$ מתקיים $r = 0$, ואין ארגומנט מוגדר.
- כל הזוויות במעריכים $e^{i\theta}$ ייכתבו ברדיאנים. מעלות ישמשו רק להמחשה מספרית.

המירו להצגה קוטבית את $z = 3 + 3i$ ואת $w = -4 + 4i$. לאחר מכן כתבו בצורה קרטזית את $a = 6e^{i\pi/3}$. בכל הצגה קוטבית בחרו זווית בקטע $[0, 2\pi)$.

פתרון

עבור z מתקיים $|z| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$. הרכיבים שווים וחיוביים, ולכן הזווית היא $\pi/4$:

$$z = 3\sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

עבור w מתקיים $|w| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$. הנקודה ברביע השני יחס הגדלים הוא 1, ולכן

$$w = 4\sqrt{2}e^{3i\pi/4}.$$

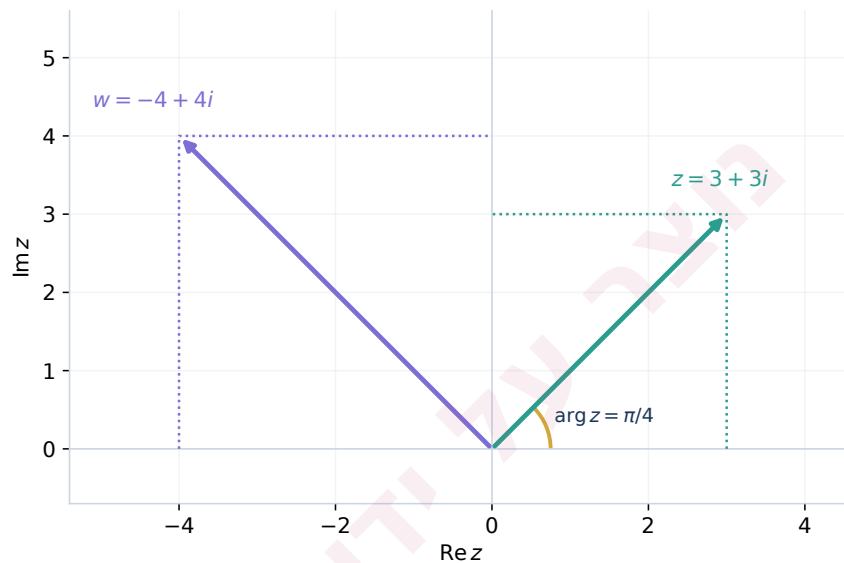
לבסוף משתמשים בזהות אוילר ובערכי הזווית $\pi/3$:

$$a = 6 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 6 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3 + 3\sqrt{3}i.$$

הזוויות הן רדיאנים. בשני המספרים הנתונים הגודל חיובי, ולכן אין קושי של ארגומנט באפס.

1.3.2 פעולות חשבון

Cartesian and polar descriptions: exact angles



הצגה קרטזית וקוטבית באותו מישור: הערך המוחלט הוא המרחק מהראשית, והארגומנט הוא זווית הכיוון.

הגדרה פורמלית

כפל: $(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

חילוק (כאשר המכנה $\neq 0$): $\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

צמוד: $(r e^{i\theta})^* = r e^{-i\theta}$

מחזוריות: $r e^{i(\theta + \pi)} = -r e^{i\theta}$, $r e^{i(\theta + 2\pi k)} = r e^{i\theta}$

נתונים $z = 1 + i$ ו- $w = -4 + 4i$. חשבו את zw ואת w/z בשתי דרכים: בהצגה קוטבית ובחישוב קרטזי. בדקו שהגדלים שהתקבלו תואמים לנוסחאות הכפל והחילוק.

פתרון

נכתוב $z = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$ ו- $w = 4\sqrt{2} e^{3i\pi/4}$. לכן

$$zw = 8e^{i\pi} = -8, \quad \frac{w}{z} = 4e^{i\pi/2} = 4i.$$

בחישוב קרטזי מתקבל

$$(1 + i)(-4 + 4i) = -4 + 4i - 4i + 4i^2 = -8,$$

$$\frac{-4+4i}{1+i} = \frac{(-4+4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-4+8i+4}{2} = 4i.$$

בדיקת גדלים: $|z||w| = \sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 8 = |-8|$ וכן $|z| = |4i| = 4 = |w|/|z|$. שתי דרכי החישוב תואמות.

1.3.3 העלאה בחזקה

חשבו את $(1+i)^{12}$ בעזרת הצגה קוטבית. אמתו את התוצאה באמצעות $(1+i)^4$.

פתרון

מכיוון ש- $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$,

$$(1+i)^{12} = (\sqrt{2})^{12} e^{12i\pi/4} = 2^6 e^{3i\pi} = -64.$$

לאימות, $(1+i)^2 = 2i$, ולכן $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$. מכאן $(1+i)^{12} = ((1+i)^4)^3 = (-4)^3 = -64$.

1.3.4 הוצאת שורש מרוכב

הגדרה פורמלית

יהי $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, ויהי $n \geq 1$ מספר שלם. למשוואה $w^n = z = re^{i\theta}$ יש n שורשים שונים:

$$w_j = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta+2\pi j}{n}}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

משמעות גאומטרית: השורשים על מעגל ברדיוס $\sqrt[n]{r}$, קודקודי מצולע משוכלל (זווית בין עוקבים $2\pi/n$).

מצאו את כל הפתרונות של $z^4 = -i$.

פתרון

נכתוב $-i = e^{-i\pi/2}$. לכן

$$z_j = e^{i\frac{-\pi/2+2\pi j}{4}} = e^{i\frac{\pi(4j-1)}{8}}, \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

דהיינו הזוויות: $-\pi/8, 3\pi/8, 7\pi/8, 11\pi/8$ (ברדיוס 1).

יהי $n \geq 2$. מצאו את כל שורשי היחידה מסדר n והוכיחו כי סכומם שווה לאפס. מה קורה כאשר $n=1$?

פתרון

שורשים: $w_j = e^{i\frac{2\pi j}{n}}, j = 0, \dots, n-1$. נסמן $w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. אז $w_j = w^j$ ולכן

$$\sum_{j=0}^{n-1} w^j = \frac{w^n - 1}{w - 1} = 0,$$

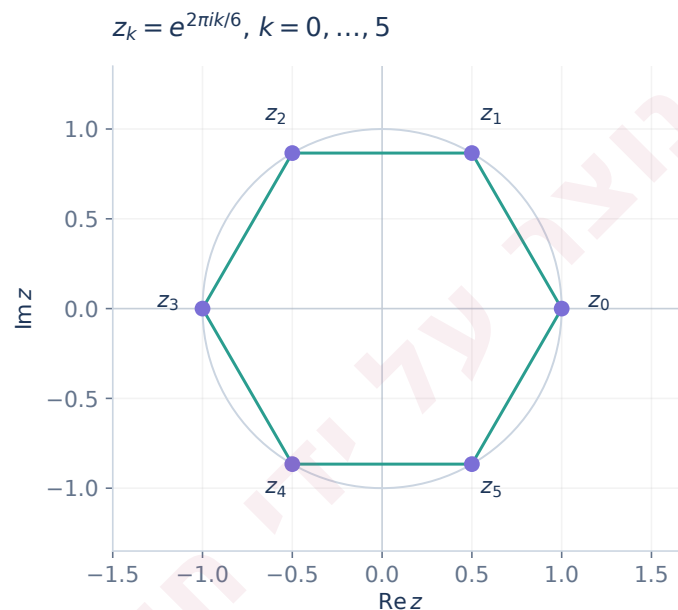
שכן $w^n = 1$ ו- $w \neq 1$ כאשר $n \geq 2$. עבור $n=1$ השורש היחיד הוא 1, ולכן הסכום הוא 1 ולא אפס.

(לביט) תהי $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ עם מקדמים ממשיים. הוכיחו: אם z פתרון אז גם z^* פתרון.

פתרון

נשתמש בזהויות: $(z_1 \dots z_m)^* = z_1^* \dots z_m^*$, $(z_1 + \dots + z_m)^* = z_1^* + \dots + z_m^*$. וממשי a מקיים $a^* = a$. אם $a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0$, מפעילים * ומקבלים $a_0 + a_1 z^* + \dots + a_n (z^*)^n = 0$. כלומר z^* הוא פתרון.

1.4 תכונות נוספות של מספרים מרוכבים



שורשי יחידה מסודרים במרווחי זווית שווים על מעגל היחידה; עבור סדר גדול מ-1 סכומם אפס.

1.4.1 כפל ב- i

כפל ב- i גורם לסיבוב המספר המרוכב בזווית $\frac{\pi}{2}$ בכיוון נגד כיוון השעון.

הוכיחו שכפל ב- i מסובב בזווית $\frac{\pi}{2}$.

פתרון

ייצוג קרטזי:

נניח $z = a + bi$. כפל ב- i נותן:

$$z \cdot i = (a + bi)i = -b + ai.$$

הווקטור (a, b) הוחלף בווקטור $(-b, a)$. זהו בדיוק סיבוב בזווית $\pi/2$ סביב הראשית נגד כיוון השעון: הקואורדינטה החדשה על ציר x היא $-b$, ועל ציר y היא a .

ייצוג קוטבי:

בייצוג קוטבי, נניח $z = re^{i\theta}$, כאשר $r = |z|$ ו- θ היא הזווית של z עם ציר ה- x החיובי. כפל ב- i נכתב כך:

$$z \cdot i = re^{i\theta} \cdot i = re^{i\theta} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = re^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}.$$

הכפלה ב- i מוסיפה לזווית θ את הזווית $\frac{\pi}{2}$, כלומר המספר המרוכב z מסתובב בזווית $\frac{\pi}{2}$ סביב הראשית, כפי שדרשנו להוכיח.

1.4.2 חילוק בהצגה קוטבית

הגדרה פורמלית

אם $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ו- $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ וגם $r_2 \neq 0$, אז:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

חשבו את $\frac{z_1}{z_2}$ עבור $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$ ו- $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

פתרון

נחשב:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2} e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

יהיו $z_1, z_2 \neq 0$. הוכיחו כי ארגומנט של המנה z_1/z_2 שווה להפרש הארגומנטים, עד כדי כפולה של 2π .

פתרון

נניח $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ו- $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, כאשר $r_1, r_2 > 0$. החלוקה נותנת:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

מכאן $\theta_1 - \theta_2$ הוא ארגומנט של המנה. אם מבקשים ארגומנט בטווח קבוע, מוסיפים לו כפולה מתאימה של 2π .

1.4.3 בחירת ארגומנט בטווח קבוע

ברשימות אלה נסמן ב- $\text{Arg}(z)$ את הארגומנט היחיד בטווח $[0, 2\pi)$, עבור $z \neq 0$.

תזכורת (מההרצאה)

לא ניתן לכתוב תמיד $\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$ או $\text{Arg}(z_1/z_2) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)$, מכיוון שהתוצאה עשויה לצאת מחוץ לטווח $[0, 2\pi)$.

חשבו את $\text{Arg}(z_1 \cdot z_2)$ עבור $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

פתרון

תחילה נחשבו את המכפלה עצמה:

$$z_1 z_2 = e^{i3\pi/4} e^{i5\pi/4} = e^{i2\pi} = 1.$$

הזווית 2π היא ארגומנט של 1, אך אינה נמצאת בטווח $[0, 2\pi)$. לכן

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(1) = 0, \quad \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) = 2\pi.$$

שני המספרים אינם שווים; הם שקולים מודולו 2π .

1.4.4 חישוב ארגומנט וניתוח רבעים

הגדרה פורמלית

למספר מרוכב $z = a + bi \neq 0$, כאשר $a \neq 0$, כל ארגומנט θ מקיים:

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}.$$

כדי לקבוע את θ באופן מדויק, עלינו להתחשב ברביע שבו נמצא המספר המרוכב:

- אם $a > 0, b > 0$: הזווית היא $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.
 - אם $a < 0, b > 0$: מוסיפים π כדי להתחשב ברביע השני: $\theta = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.
 - אם $a < 0, b < 0$: מוסיפים π לרביע השלישי: $\theta = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.
 - אם $a > 0, b < 0$: מוסיפים 2π כדי לקבל זווית חיובית ברביע הרביעי: $\theta = 2\pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.
- אם $b = 0$ ו- $a > 0$, אז $\text{Arg}(z) = 0$; אם $b = 0$ ו- $a < 0$, אז $\text{Arg}(z) = \pi$. אם $a = 0$, הזווית תלויה רק בערך b :
- אם $b > 0$: $\theta = \frac{\pi}{2}$.
 - אם $b < 0$: $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

מצאו את הזווית θ עבור $z = -1 + \sqrt{3}i$.

פתרון

הנתון הוא $a = -1, b = \sqrt{3}$. תחילה נחשב:

$$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}.$$

מכיוון ש- $a < 0$ ו- $b > 0$, המספר נמצא ברביע השני. לכן:

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

מצאו את הזווית θ עבור $z = -5 - 5i$.

פתרון

הנתון הוא $a = -5, b = -5$. תחילה נחשב:

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

מכיוון ש- $a < 0, b < 0$, המספר נמצא ברביע השלישי. לכן:

$$\theta = \pi + \arctan(1) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$

1.5 עקרון האינדוקציה

הגדרה פורמלית

עקרון האינדוקציה (החלשה):

יהי מספר שלם לא שלילי, ותהי $P(n)$ טענה המוגדרת לכל מספר שלם $n \geq n_0$. נניח כי:

1. **צעד הבסיס:** הטענה $P(n_0)$ נכונה.

2. **צעד האינדוקציה:** לכל מספר שלם $n \geq n_0$, מן ההנחה $P(n)$ נובעת הטענה $P(n+1)$.

אז $P(n)$ נכונה לכל מספר שלם $n \geq n_0$.

הוכיחו באינדוקציה כי לכל $n \geq 1$ מתקיים

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

פתרון

הגדרת הטענה: $P(n) : \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

בסיס: $n = 1$: אגף שמאל $= 1$, אגף ימין $= \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. נכון.

הנחת אינדוקציה: נניח שלמספר $k \geq 1$ מתקיים $\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$.
צעד מעבר:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \left(\sum_{i=1}^k i \right) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

קיבלנו את הנוסחה עבור $k+1$.

סיכום: לכל $n \geq 1$ הטענה נכונה.

הוכיחו שלכל $n \geq 1$ מתקיים $7 \mid (8^n - 1)$.

פתרון

הגדרת הטענה: $P(n) : 7 \mid (8^n - 1)$

בסיס: $n = 1$: $8^1 - 1 = 7$, אכן $7 \mid 7$.

הנחת אינדוקציה: נניח שלמספר $k \geq 1$ מתקיים $7 \mid (8^k - 1)$, כלומר קיים $m \in \mathbb{Z}$ כך ש $8^k - 1 = 7m$.

צעד מעבר:

$$8^{k+1} - 1 = 8 \cdot 8^k - 1 = 8(8^k - 1) + 7.$$

מן ההנחה $8^k - 1 = 7m$, לכן

$$8^{k+1} - 1 = 8 \cdot 7m + 7 = 7(8m + 1),$$

ולכן $7 \mid (8^{k+1} - 1)$.
סיכום: לכל $n \geq 1$ מתקיים $7 \mid (8^n - 1)$.
הערת קיצור: $8 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 8^n \equiv 1 \pmod{7}$.

הוכיחו כי לכל $n \geq 4$ מתקיים

$$2^n \geq n^2.$$

פתרון

נוכיח באינדוקציה על n .

בסיס: $n = 4$: $2^4 = 16 = 4^2$. נכון.

הנחת אינדוקציה: נניח $2^k \geq k^2$ עבור $k \geq 4$.
צעד מעבר:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2k^2.$$

די להראות $2k^2 \geq (k+1)^2 \iff k^2 - 2k - 1 \geq 0$ עבור $k \geq 4$ מתקיים $k^2 - 2k - 1 > 0$, ולכן $2^{k+1} \geq (k+1)^2$.
מכאן לפי אינדוקציה $2^n \geq n^2$ לכל $n \geq 4$.

1.6 תרגילים משלימים: גאומטריה וכיול אות

מצאו ותארו גאומטרית את כל $z \in \mathbb{C}$ המקיימים $|z-1| = |z+1|$. אילו מהם מקיימים גם $|z| = 2$?

פתרון

נכתוב $z = x + iy$. שני האגפים אינם שלילים, ולכן מותר להעלות בריבוע:

$$|z-1|^2 = (x-1)^2 + y^2, \quad |z+1|^2 = (x+1)^2 + y^2.$$

מכאן

$$(x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2 \iff x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1 \iff x = 0.$$

זהו הציר המדומה: אוסף הנקודות שמרחקן משתי הנקודות $-1, 1$ שווה. התנאי הנוסף נותן $y^2 = 4$, ולכן החיתוך הוא $z = 2i$ או $z = -2i$.

במודל פשוט לאות בעל שני רכיבים, מערכת כיול מבצעת את הפעולה $T(z) = (1+i)z$. מה ההשפעה על הגודל והזווית? חשבו את $T(1-i)$, ומצאו קלט שעבורו הפלט הוא $2i$.

פתרון

מכיוון ש- $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, לכל $z = re^{i\theta} \neq 0$ מתקיים $T(z) = \sqrt{2}re^{i(\theta+\pi/4)}$. כלומר, הגודל מוכפל ב- $\sqrt{2}$ והכיוון מסתובב בזווית $\pi/4$ נגד כיוון השעון. יש גם $T(0) = 0$. בחישוב ישיר, $T(1-i) = (1+i)(1-i) = 1-i^2 = 2$. כדי לקבל $2i$, פותרים $(1+i)z = 2i$:

$$z = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i+2}{2} = 1+i.$$

בדיקה: $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$.

תרגול 2: שיטות הוכחה, קבוצות ושדות

עיקרון מנחה

מטרות התרגול. נחזק הוכחות באינדוקציה ובשני כיוונים, נזהה את אקסיומות השדה ונחשב בשדות סופיים. נבחין בין חישוב מוכר במספרים ממשיים לבין חישוב המותאם לשדה הנתון.

החלק הראשון הוא חזרה ממוקדת על שיטות הוכחה ועל שפת הקבוצות. החלק השני מציג שדות וחישובים בשדות סופיים; סדר התרגול בפועל יותאם להתקדמות ההרצאות.

2.1 עקרון האינדוקציה

הגדרה פורמלית

עקרון האינדוקציה (החלשה):

יהי n_0 מספר שלם לא שלילי, ותהי $P(n)$ טענה המוגדרת לכל מספר שלם $n \geq n_0$. נניח כי:

1. **צעד הבסיס:** הטענה $P(n_0)$ נכונה.

2. **צעד האינדוקציה:** לכל מספר שלם $n \geq n_0$, מן ההנחה $P(n)$ נובעת הטענה $P(n+1)$.

אז $P(n)$ נכונה לכל מספר שלם $n \geq n_0$.

הוכיחו באינדוקציה כי לכל $n \geq 1$ מתקיים

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

פתרון

הגדרת הטענה: $P(n) : \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

בסיס: $n = 1$: אגף שמאל $= 1$, אגף ימין $= \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. נכון.

הנחת אינדוקציה: נניח שלמספר $k \geq 1$ מתקיים $\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$.
צעד מעבר:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \left(\sum_{i=1}^k i \right) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

קיבלנו את הנוסחה עבור $k+1$.

סיכום: לכל $n \geq 1$ הטענה נכונה.

□

הוכיחו באינדוקציה שלכל מספר שלם $n \geq 1$ מתקיים $(14^n - 1) \mid 13$. הסבירו גם כיצד חשבון מודולרי נותן בדיקה קצרה של הטענה.

פתרון

בבסיס $n = 1$ מתקבל $14 - 1 = 13$, המתחלק ב-13. נניח של- $k \geq 1$ קיים $m \in \mathbb{Z}$ כך ש- $14^k - 1 = 13m$. אז

$$14^{k+1} - 1 = 14(14^k - 1) + 13 = 14 \cdot 13m + 13 = 13(14m + 1).$$

הביטוי מתחלק ב-13, ולכן צעד האינדוקציה הושלם. מאחר שהבסיס והמעבר נכונים, הטענה נכונה לכל $n \geq 1$. לבדיקה נוספת: $14 \equiv 1 \pmod{13}$, ומכאן $14^n \equiv 1^n = 1 \pmod{13}$.

□

הוכיחו כי לכל $n \geq 4$ מתקיים

$$2^n \geq n^2.$$

פתרון

נוכיח באינדוקציה על n .

בסיס: $n = 4$: $2^4 = 16 = 4^2$. נכון.

הנחת אינדוקציה: נניח $2^k \geq k^2$ עבור $k \geq 4$.
צעד מעבר:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2k^2.$$

די להראות $2k^2 \geq (k+1)^2 \iff k^2 - 2k - 1 \geq 0$. עבור $k \geq 4$ מתקיים $k^2 - 2k - 1 > 0$, ולכן $2^{k+1} \geq (k+1)^2$.
מכאן לפי אינדוקציה $2^n \geq n^2$ לכל $n \geq 4$.

□

2.2 קבוצות**הגדרה פורמלית**

• **הכלה:** $A \subseteq B$ כל האיברים של A נמצאים גם ב- B .

• **איחוד:** $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ או } x \in B\}$.

• **חיתוך:** $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ וגם } x \in B\}$.

הוכיחו כי $A \subseteq B$ אם ורק אם $A \cup B = B$.

פתרון

כיוון 1: נניח $A \subseteq B$. מן ההגדרה של איחוד מתקיים $A \cup B \subseteq B$ ומצד שני תמיד $B \subseteq A \cup B$.
לכן $A \cup B = B$.

כיוון 2: נניח $A \cup B = B$. יהי $x \in A$. אז $x \in A \cup B$, ומכאן $x \in B$. לכן $A \subseteq B$.

□

הוכיחו כי $A \subseteq B$ אם ורק אם $A \cap B = A$.

פתרון

כיוון 1: נניח $A \subseteq B$. יהי $x \in A \cap B$. אז $x \in A$, וכן $x \in B$; לכן $A \cap B \subseteq A$. להפך, אם $x \in A$, אז מן ההכלה $x \in B$, ולכן $x \in A \cap B$, ומכאן $A \subseteq A \cap B$. בסיכום $A \cap B = A$.

כיוון 2: נניח $A \cap B = A$. יהי $x \in A$. אז $x \in A \cap B$, ומכאן $x \in B$. לכן $A \subseteq B$.

□

2.3 מבנה אלגברי - שדות

2.3.1 אקסיומות השדה

תזכורת (מההרצאה)

שדה הוא קבוצה F שעליה מוגדרות שתי פעולות: חיבור וכפל. הפעולות מקיימות את האקסיומות הבאות. בפרט, דורשים $0_F \neq 1_F$:

- **סגירות:** אם $a, b \in F$ אז גם $a +_F b \in F$ וגם $a \times_F b \in F$.
- **חילופיות:** $a +_F b = b +_F a$ ו- $a \times_F b = b \times_F a$.
- **צירופיות:** $(a +_F b) +_F c = a +_F (b +_F c)$ ו- $(a \times_F b) \times_F c = a \times_F (b \times_F c)$.
- **פילוג:** $(a +_F b) \times_F c = a \times_F c +_F b \times_F c$ וכן $a \times_F (b +_F c) = a \times_F b +_F a \times_F c$.
- **איברים נייטרליים:** קיים $0 \in F$ כך שלכל $a \in F$ מתקיים $a +_F 0_F = a$ וקיים $1_F \in F$ כך שלכל $a \in F$ מתקיים $a \times_F 1_F = a$.
- **נגדים והופכיים:** לכל $a \in F$ קיים נגדי $-a$ עם $a +_F (-a) = 0_F$; ולכל $a \in F$ שאינו אפס קיים הופכי כפל a^{-1} עם $a \times_F a^{-1} = 1_F$.

2.6. דוגמה

- **דוגמאות:** $\mathbb{Q}$ (שברים), $\mathbb{R}$ (ממשיים), $\mathbb{C}$ (מרוכבים) הן שדות עם החיבור והכפל הרגילים.
- **לא שדות:** $\mathbb{Z}$ ו- $\mathbb{N}$ אינן שדות, כי לרוב האיברים אין הופכי כפל (למשל ל-2 אין הופכי ב- $\mathbb{Z}$).

2.3.2 סימונים

נהוג לסמן שדה כללי באות F (ולעתים $\mathbb{F}$). כאשר אין חשיבות לשדה המסוים, נכתוב "יהי F שדה".
מוסכמת סימון: כאשר השדה ברור מן ההקשר, נשמיט את ציון השדה בפעולות ובאיברים 0, 1.

יהי $a \in F$ עם $a \neq 0_F$. הוכיחו כי $(a^{-1})^{-1} = a$.

פתרון

נזכור כי לכל איבר הפיך בשדה יש הופכי כפל יחיד, ובפרט $a \times_F a^{-1} = 1_F$. נסמן $x = (a^{-1})^{-1}$ ונחשב:

$$(a^{-1}) \times_F x = 1_F \quad / \quad \times_F a$$

$$a \times_F (a^{-1}) \times_F x = a \times_F 1_F$$

$$1_{\mathbb{F}} \times_{\mathbb{F}} x = a \quad (*)$$

ולכן $x = a$, כלומר $(a^{-1})^{-1} = a$.
הערה: במעבר (*) השתמשנו בכך ש- $1_{\mathbb{F}} \times_{\mathbb{F}} a^{-1} = a$.

□

יהי $a \in F$ עם $a \neq 0_{\mathbb{F}}$. הוכיחו שההופכי הכפלי של a יחיד.

פתרון

נניח שקיים $b \in F$ כך ש- $a \times_{\mathbb{F}} b = 1_{\mathbb{F}}$. נכפול משמאל ב- a^{-1} :

$$a \times_{\mathbb{F}} b = 1_{\mathbb{F}} \quad / \times_{\mathbb{F}} a^{-1}$$

$$(a^{-1}) \times_{\mathbb{F}} a \times_{\mathbb{F}} b = a^{-1} \times_{\mathbb{F}} 1_{\mathbb{F}}$$

$$1_{\mathbb{F}} \times_{\mathbb{F}} b = a^{-1} \quad (*)$$

ומכאן $b = a^{-1}$. לכן ההופכי של a יחיד. הערה: שוב, במעבר (*) השתמשנו בזהות $(a^{-1}) \times_{\mathbb{F}} a = 1_{\mathbb{F}}$.

□

2.4 שדות - עוד תרגילים

יהיו a, b שני אברים בשדה $\mathbb{F}$. הוכיחו כי אם $a \times_{\mathbb{F}} b = 0_{\mathbb{F}}$ אזי $a = 0_{\mathbb{F}}$ או $b = 0_{\mathbb{F}}$.

פתרון

נפריד למקרים לפי ערכו של b . **מקרה 1:** $b = 0_{\mathbb{F}}$, וסיימנו.
מקרה 2: $b \neq 0_{\mathbb{F}}$, משום ש- $\mathbb{F}$ שדה אז קיים לו הופכי b^{-1} . נכפול את שני האגפים ב- b^{-1} , ונקבל

$$a \times_{\mathbb{F}} b \times_{\mathbb{F}} b^{-1} = 0_{\mathbb{F}} \times_{\mathbb{F}} b^{-1} \implies a \times_{\mathbb{F}} 1_{\mathbb{F}} = a = 0_{\mathbb{F}}$$

□

□

טענה 2.10.

בשדה אין מחלקי אפס לא טריוויאליים.

יהי $\mathbb{F}$ שדה. נגדיר מבנה חדש באופן הבא: $(F \times F, \oplus, \otimes)$, כאשר

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a +_{\mathbb{F}} c, b +_{\mathbb{F}} d),$$

$$(a, b) \otimes (c, d) = (a \times_{\mathbb{F}} c, b \times_{\mathbb{F}} d).$$

האם המבנה החדש הוא שדה?

פתרון

זהו מבנה שבו כל איבר מורכב מ-2 אברים של השדה הנתון (כמו למשל נקודה במערכת צירים). פעולת החיבור החדשה $\oplus$ היא לחבר בנפרד את האברים הראשונים והשניים, ובאופן דומה מוגדרת פעולת הכפל $\otimes$.

נראה שהמבנה אינו שדה באמצעות שני איברים לא אפסיים שמכפלתם אפס. כלומר: נניח בשלילה כי $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$ שדה, בהינתן ש $\mathbb{F}$ שדה. נזהה גם את איבר האפס - $(0_{\mathbb{F}}, 0_{\mathbb{F}})$. שנובע מהפעולות של $\mathbb{F}$ בכל קואורדינטה. וכעת נשים לב כי מתקיים

$$(0_{\mathbb{F}}, 1_{\mathbb{F}}) \otimes (1_{\mathbb{F}}, 0_{\mathbb{F}}) = (0_{\mathbb{F}} \times_{\mathbb{F}} 1_{\mathbb{F}}, 1_{\mathbb{F}} \times_{\mathbb{F}} 0_{\mathbb{F}}) \\ = (0_{\mathbb{F}}, 0_{\mathbb{F}}).$$

אבל אף אחד מהמוכפלים איננו איבר האפס, ולכן מהתרגיל הקודם נקבל סתירה.

□

2.5 שדות סופיים

הגדרה וסימונים

הגדרה פורמלית

- **שדה סופי** הוא שדה שמספר איבריו סופי. נסמן $q = |\mathbb{F}|$.
- לכל שדה סופי יש מספר איברים מהצורה $q = p^n$ כאשר p ראשוני ו- $n \geq 1$ מספר שלם. זהו משפט מבני על שדות סופיים.
- עבור מספר ראשוני p , הקבוצה $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ עם חיבור וכפל מודולו p היא שדה. שדה זה נקרא **השדה הראשוני ממאפיין p** .
- סכום וכפל בשדה $\mathbb{F}_p$ מוגדרים ע"י:

$$a +_{\mathbb{F}_p} b := (a + b) \bmod p, \quad a \times_{\mathbb{F}_p} b := (a \cdot b) \bmod p.$$

דוגמאות

2.12. דוגמה

- $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ עם $1 + 1 = 0$ ו- $1 \cdot 1 = 1$.
- $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ עם חיבור וכפל מודולו 3.
- $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ עם פעולות מודולו 5.

תכונות בסיסיות

2.13. טענה

בכל שדה סופי $\mathbb{F}_q$, קבוצת האיברים הלא-אפסיים $\mathbb{F}_q^\times$ סגורה לכפל, ולכל איבר בה יש הופכי יחיד.

2.14. טענה

בכל שדה סופי $\mathbb{F}_q$, לכל $a \in \mathbb{F}_q$ מתקיים $a^q = a$.

2.15. טענה

לכל $a \neq 0$ בשדה סופי $\mathbb{F}_q$ מתקיים $a^{q-1} = 1$.

הסבר: הסגירות נובעת מכך שבשדה אין מחלקי אפס; קיום ההופכי ויחידותו נובעים מאקסיומות השדה ומהוכחה לעיל. להוכחת שתי זהויות החזקות, יהי $a \neq 0$ ונסמן

$$P = \prod_{x \in \mathbb{F}_q^\times} x \neq 0.$$

הכפלה ב- a מסדרת מחדש את האיברים הלא אפסיים: ההעתקה $x \mapsto ax$ הפיכה, וההופכית היא $x \mapsto a^{-1}x$ לכן

$$P = \prod_{x \in \mathbb{F}_q^\times} (ax) = a^{q-1}P.$$

מותר לצמצם את $P \neq 0$, ומתקבל $a^{q-1} = 1$, ולכן $a^q = a$. עבור $a = 0$ מתקבלת הזהות $0^q = 0$ ישירות.

2.16. דוגמה

נחשב ב- $\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ את כל ההופכיים (עבור $1 \leq a \leq 6$):

a	1	2	3	4	5	6
a^{-1}	1	4	5	2	3	6

נבדוק לדוגמה: $4 \cdot 2 \equiv 1$, $3 \cdot 5 = 15 \equiv 1$, $2 \cdot 4 = 8 \equiv 1$, וכו'.

הראו שבכל שדה סופי $\mathbb{F}_q$ מתקיים

$$(a - b)^q = a^q - b^q.$$

פתרון

נשתמש בזהות $x^q = x$, שהוכחה לכל איבר $x \in \mathbb{F}_q$. בפרט היא חלה גם על $a - b$, ולכן

$$(a - b)^q = a - b = a^q - b^q.$$

כך מתקבלת הטענה ישירות, ללא צורך לחשב מקדמים בינומיים.

עבדו בשדה $\mathbb{F}_{13} = \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

1. מצאו את ההופכיים של 2, 3, 4, 5, 6.

2. חשבו, תוך בדיקה שכל מכנה שונה מאפס,

$$E = (5^{-1} + 2)(4 - 3^{-1})^{-1} - 1.$$

פתרון

כל החשבון נעשה מודולו 13. בודקים את המכפלות

$$2 \cdot 7 = 14 \equiv 1, \quad 3 \cdot 9 = 27 \equiv 1, \quad 4 \cdot 10 = 40 \equiv 1,$$

$$5 \cdot 8 = 40 \equiv 1, \quad 6 \cdot 11 = 66 \equiv 1.$$

לכן ההופכיים, לפי הסדר, הם 7, 9, 10, 8, 11. כעת $5^{-1} + 2 = 8 + 2 = 10$, ואילו

$$4 - 3^{-1} = 4 - 9 = -5 \equiv 8 \neq 0.$$

ההופכי של 8 הוא 5, שכן $8 \cdot 5 = 40 \equiv 1$. לפיכך

$$E \equiv 10 \cdot 5 - 1 = 49 \equiv 10 \pmod{13}.$$

כל ההופכיים שהופיעו מוגדרים, והתוצאה היא מחלקת השארית 10.

הראו שבשדה סופי $\mathbb{F}_q$ לכל $a \neq 0$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $a^n = 1$.

פתרון

בקבוצה $\mathbb{F}_q^\times$ יש בדיוק $q - 1$ איברים, והיא סגורה תחת כפל. נניח שגודלה $m = q - 1$. נתבונן ברשימה:

$$a, a^2, a^3, \dots, a^{m+1}.$$

יש $m + 1$ איברים אך רק m אפשריים שונים, ולכן שניים זהים נניח $a^k = a^l$ עם $k > l$. נכפיל ב- a^{-l} ונקבל $a^{k-l} = 1$. לכן לכל איבר לא אפסי קיימת חזקה טבעית חיובית השווה לאיבר היחידה. $\square$

2.6 חישובים ויישומים בשדות סופיים

מערכת שומרת שתי סיביות מידע $a, b \in \mathbb{F}_2$ ומוסיפה סיבית בדיקה c כך ש- $a + b + c = 0$. מצאו את c . אם אחת משלוש הסיביות מתהפכת, האם הבדיקה מזהה זאת? מה יקרה אם בדיוק שתיים מתהפכות?

פתרון

ב- $\mathbb{F}_2$ מתקיים $-x = x$, ולכן $c = a + b$. למשל, עבור $a = b = 1$ מתקבל $c = 0$. נסמן ב- $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{F}_2$ את השגיאות, כאשר $e_j = 1$ מציין היפוך. סכום הסיביות שנקלטו הוא

$$(a + e_1) + (b + e_2) + (c + e_3) = (a + b + c) + (e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3.$$

בהיפוך יחיד הסכום הוא 1, ולכן הבדיקה מזהה שגיאה. בשני היפוכים הסכום הוא $1 + 1 = 0$, ולכן שגיאה כזאת אינה מתגלה. הבדיקה מספקת גילוי של היפוך יחיד, אך אינה קובעת איזו סיבית התהפכה.

תרגול 3: מערכות לינאריות ותתי מרחבים

עיקרון מנחה

מטרות התרגול. ננסח בעיות כמערכות לינאריות, נדרג תוך שמירה על קבוצת הפתרונות ונבחין בין משתנים חופשיים למשתני ציר. נקשר מערכות הומוגניות למרחבים וקטוריים ונבדוק סגירות באופן שיטתי.

3.1 מערכות משוואות לינאריות ודירוג

3.1.1 מערכת משוואות לינארית

תזכורת (מההרצאה)

בצורה הכללית, עבור מספר טבעי n , משוואה לינארית ב- n נעלמים (משתנים) נכתבת כך:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

כאשר $a_1, a_2, \dots, a_n$ ו- b מייצגים **מספרים נתונים** בשדה נתון $\mathbb{F}$ (למשל $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ או שדה סופי) ו- $x_1, x_2, \dots, x_n$ הם ה**נעלמים** או המשתנים. a_i נקרא **המקדם** של x_i , ו- b נקרא **האיבר החופשי** של המשוואה. מערכת של m משוואות ב- n נעלמים נראית כך בצורה הכללית:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

לפתרון המערכת נוח לרכז את ה**מקדמים** במטריצה, תוך שמירה על סדר המשתנים. לכן, כדי לחסוך בכתיבה, נרשום רק את מטריצת המקדמים של המשתנים (נקראת **מטריצת המקדמים**), או מטריצת המקדמים **המורחבת** שכוללת גם את האיברים החופשיים. כל עוד נשמור על כללי היסוד ונהיה עקביים, נדע איזה מקדם משויך לאיזה משתנה.

3.1. דוגמה

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -4x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{form matrix}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

3.1.2 פעולות אלמנטריות

הגדרה פורמלית

פעולות שורה אלמנטריות:

פעולות אלמנטריות הן שינוי המטריצה באחד מהאופנים הבאים:

1. החלפה בין שתי שורות i ו- j שמסומנת ע"י $R_i \longleftrightarrow R_j$.
 2. הכפלת שורה i בסקלר **שונה מאפס** λ שמסומנת ע"י $R_i \leftarrow \lambda R_i$.
(שימו לב שפעולת חילוק במספר a שאינו אפס היא בעצם כפל ב- $1/a$)
 3. חיבור כפולה של שורה j בסקלר λ לשורה i שמסומנת ע"י $R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$.
- פעולות שורה אלמנטריות לא משנות את הפתרונות של מערכת משוואות.
 - לכל פעולת שורה אלמנטרית יש פעולת שורה אלמנטריות הפוכה.

הגדרה פורמלית

נאמר כי מטריצות A ו- B **שקולות שורות** (או בקיצור רק שקולות) ונסמן $A \sim B$, אם מטריצה B מתקבלת ע"י סדרה של פעולות שורות אלמנטריות על המטריצה A .

הגדרה פורמלית

איבר פותח (מוביל): בכל שורה במטריצה (שאיננה שורת אפסים), האיבר הראשון השונה מאפס ייקרא האיבר הפותח של השורה.

הגדרה פורמלית

מטריצה מדורגת: כל איבר מוביל בשורה נמצא משמאל לאיבר המוביל בשורה שמתחתיו. אם יש שורות אפסים, הן מופיעות מתחת לשורות שאינן שורות אפסים.

הגדרה פורמלית

מטריצה מדורגת קנונית: מדורגת + ובנוסף בכל שורה (שאינה שורת אפסים), האיבר המוביל שווה ל-1 וכל האיברים שמתחתיו ומעליו באותה עמודה שווים ל-0. כללים אלה חלים על כל עמודות המטריצה, לרבות עמודות האיברים החופשיים אם מדרגים מטריצה מורחבת.

3.2. טענה

כל מטריצה הינה שקולה למטריצה מדורגת קנונית אחת ויחידה.

דוגמאות:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ לא מדורגת.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ מדורגת, לא קנונית.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ מדורגת קנונית.

3.1.3 אלגוריתם גאוס לדירוג מטריצות

תזכורת (מההרצאה)

1. מתחילים בשורה הפעילה הראשונה ובעמודה הראשונה. מחפשים בעמודה איבר לא אפס בשורה הפעילה או מתחתיה. אם אין כזה, עוברים לעמודה הבאה.
2. מחליפים שורות כדי להעביר את האיבר שנמצא לשורה הפעילה. מותר לחלק בו, משום שווידאנו שאינו אפס.
3. מכפילים את השורה הפעילה בהופכי של האיבר המוביל כדי לקבל מוביל 1, ומאפסים בעזרתה את האיברים שמתחתיו.
4. עוברים לשורה הפעילה הבאה ומחפשים עמודת ציר מימין לקודמתה. עמודת הציר אינה חייבת להיות בעלת אותו מספר כמו השורה.
5. לאחר שמתקבלת צורה מדורגת, אפשר לאפס גם מעל כל מוביל, מהציר האחרון כלפי הראשון, כדי לקבל צורה מדורגת קנונית. שלב זה נקרא השלמת גאוס--ז'ורדן.

דרגו מעל $\mathbb{R}$ את המטריצה המורחבת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

לצורה מדורגת קנונית, וקראו ממנה את פתרון המערכת.

פתרון

נחסר את כפולות השורה הראשונה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

נכפיל R_2 ב-1 ונחסר אותה מ- R_3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

נפעיל $R_2 \leftarrow R_2 + R_3$, אחר כך $R_1 \leftarrow R_1 - R_3 - R_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

לכן הפתרון היחיד הוא $(2, -1, 3)^T$. בהצבה: $2 - 1 + 3 = 4$, $4 - 1 + 9 = 12$, $2 - 2 + 6 = 6$, כדרוש.

הערה פורמלית

כדי לפתור מערכת לינארית, מדרגים את המטריצה המורחבת, הכוללת גם את האגפים החופשיים. אפשר לעצור בצורה מדורגת ולהציב לאחור, או להמשיך לצורה מדורגת קנונית ולקרוא ממנה את הפתרונות.

דוגמה 3.4.

למשל מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 8 \\ 4x + 2z = 12 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

נכתוב את המערכת בצורה מטריציונית,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 12 \\ 2 & 2 & 0 & 8 \end{array} \right)$$

נשתמש בדירוג שראינו בתרגיל הקודם ונקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 12 \\ 2 & 2 & 0 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

נחזור למשוואות,

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 3 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = 1 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

לכן בסה"כ קיבלנו כי קב' הפתרונות של המערכת היא $S = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

ניתן לראות מדוגמה זו איך דירוג עוזר לנו לפתור מערכת משוואות. בהמשך נראה כי לא תמיד יש פתרון יחיד.

דרגו את המטריצה הבאה מעל $\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ עד לצורה הקנונית. חשבו את כל הפעולות מודולו 7 והשתמשו בנציגים $0, 1, \dots, 6$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

פתרון

$$\begin{aligned}
 &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 4R_2} \\
 &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 6 \end{array}\right) \\
 &\xrightarrow{R_3 \rightarrow 5^{-1}R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 6/5 \end{array}\right) \\
 &\xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow R_1 - 5R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/4 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 5/4 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 6/5 \end{array}\right)
 \end{aligned}$$

פתרו מעל $\mathbb{C}$ את המערכת

$$\begin{cases} iz + (1+i)w = 3-i, \\ 2iz + (3+2i)w = 7-4i. \end{cases}$$

אמתו את הפתרון בשתי המשוואות.

פתרון

נחסר מן המשוואה השנייה פעמיים את הראשונה. מקדם z מתאפס, ומקדם w הוא $-(3+2i)$.
 $2(1+i) = 1$ לכן

$$w = (7-4i) - 2(3-i) = 1-2i.$$

מציבים במשוואה הראשונה ומחשבים את המכפלה:

$$(1+i)(1-2i) = 1-2i+i-2i^2 = 3-i.$$

לכן $iz = (3-i) - (3-i) = 0$, ומכיוון ש- $i \neq 0$ מתקבל $z = 0$. בדיקה במשוואה השנייה:

$$(3+2i)(1-2i) = 3-6i+2i-4i^2 = 7-4i.$$

כך $(z, w) = (0, 1-2i)$ פותר את שתיהן, ושלבי האלימינציה מראים שהוא יחיד.

3.2 פתרון מערכות משוואות לינאריות

הגדרה פורמלית

לאחר דירוג, משתנה שבעמודתו יש איבר מוביל במטריצת המקדמים נקרא **משתנה ציר** (או משתנה תלוי). משתנה שבעמודתו אין איבר מוביל נקרא **משתנה חופשי**. במערכת עקבית אפשר לבחור לכל משתנה חופשי ערך שרירותי בשדה, ואז משתני הציר נקבעים מן המשוואות. מעל שדה אינסופי כל פרמטר חופשי יוצר אינסוף אפשרויות; מעל שדה סופי מספר האפשרויות סופי. מספר המשתנים החופשיים נקרא מספר דרגות החופש של מערכת עקבית.

הגדרה פורמלית

הדרגה של מטריצה A (מסמנים $\text{rank}(A)$) היא מספר השורות שאינן אפס בצורה מדורגת. לחלופין: מספר האיברים הפותחים (מובילים) בצורה מדורגת.

הערה: אם מערכת עם מטריצת מקדמים A ו- n משתנים היא עקבית, מספר דרגות החופש הוא $n - \text{rank}(A)$. מעל $\mathbb{F}_q$ יש לה בדיוק $q^{n-\text{rank}(A)}$ פתרונות.

$$\cdot \begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ 4x + 3y - 2z = 14 \end{cases} \quad \text{פתרו את מערכת המשוואות הבאה}$$

פתרון

נכתוב את המערכת בצורה מטריציונית ונדרג,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 6 \\ 2 & -1 & 4 & | & 2 \\ 4 & 3 & -2 & | & 14 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 6 \\ 0 & -5 & 10 & | & -10 \\ 0 & -5 & 10 & | & -10 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 6 \\ 0 & -5 & 10 & | & -10 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{-1}{5}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 6 \\ 0 & 1 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לא נוכל להמשיך לדרג. קיבלנו שלשני המשתנים הראשונים יש שורה עם איבר מוביל, ואילו לשלישי אין.

הדרגה של המטריצה היא 2, מספר דרגות החופש הוא 1. לכן נסיק ששני הראשונים, x, y הם משתנים תלויים ואילו המשתנה השלישי z הוא משתנה חופשי שיכול לקבל כל ערך. נחזור למערכת המשוואות,

$$\begin{aligned} x + z &= 2 \\ y - 2z &= 2 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

כאמור x, y הם תלויים, אז נבטא אותם בעזרת המשתנה החופשי z :

$$\begin{aligned} x &= 2 - z \\ y &= 2 + 2z \end{aligned}$$

לכן קבוצת הפתרונות היא,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2-s \\ 2+2s \\ s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -s \\ 2s \\ s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

קיבלנו שישנם **אינסוף פתרונות**: לכל בחירה של מספר ממשי s , נציב אותו ונמצא מהם ערכי שני האחרים, ויהיה לנו ביד פתרון חדש.

למשל אפשר להציב $s = 0, 1$ ונקבל את הפתרונות $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. הצבה שלהם במערכת המשוואות המקורית אכן תהווה פתרון.

פתרו את מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} 3x_1 + 12x_2 - 6x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

פתרון

נדרג עד לזיהוי סתירה:

$$\begin{pmatrix} 3 & 12 & -6 & | & 4 \\ 1 & 4 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & | & 1 \\ 3 & 12 & -6 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 3 \cdot R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

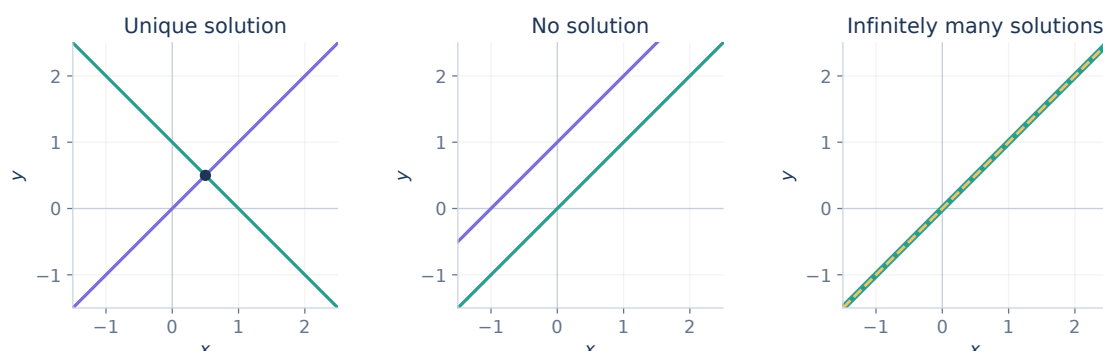
כבר בשלב זה מופיעה שורת סתירה, ולכן אין צורך להשלים את הדירוג לצורה קנונית. נחזור למערכת המשוואות:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

קיבלנו ביטוי שהוא פסוק שקר - סתירה ולכן אין פתרון למערכת. להבא אין צורך לחזור למערכת המשוואות, נזהה במטריצה עצמה **שורת סתירה**: שורה שכולה אפסים פרט למספר החופשי שאינו 0. נוכל מייד לרשום שאין פתרון.

דיאגרמה

לסיכום, ראינו שישנן שלוש אפשרויות:



מעל המספרים הממשיים, שתי משוואות בשני נעלמים עשויות לתאר ישרים נחתכים, מקבילים ושונים, או מתלכדים. בהתאמה מתקבלים פתרון יחיד, אין פתרון, או אינסוף פתרונות.

עבור אילו ערכים של $a \in \mathbb{R}$ למערכת המשוואות הבאה יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות, אפס פתרונות? רשמו את דרגת מטריצת המקדמים בכל אחד מהמקרים.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 2z = 1 \\ x + az = 1 \end{cases}$$

פתרון

נעבור למטריצה ונדרג:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1, R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_2, R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2 - 2a & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

אנו רוצים להפוך את האיבר המוביל האחרון ל-1 אך לא נוכל לחלק בביטוי $2 - 2a$ כי ייתכן והוא מתאפס. נפריד למקרים:

מקרה 1: $2 - 2a = 0$, כלומר $a = 1$. נציב ומייד נראה שהשווה השלישית היא שורת סתירה ולכן אין פתרון. (הדרגה היא 2)

מקרה 2: $2 - 2a \neq 0$, כלומר $a \neq 1$. כעת נוכל להמשיך ולדרג: נחלק בביטוי הזה כדי לקבל איבר מוביל 1.

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow \frac{1}{2-2a} R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2-2a} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - aR_3, R_2 \rightarrow R_2 - aR_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 + \frac{a}{2-2a} \\ 0 & 1 & 0 & 1 + \frac{a}{2-2a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2-2a} \end{array} \right)$$

כאן הפתרון הוא יחיד והוא $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + \frac{a}{2-2a} \\ 1 + \frac{a}{2-2a} \\ \frac{-1}{2-2a} \end{pmatrix} \right\}$ ודרגת המטריצה היא 3. (אין דרגות חופש)

לסיכום: עבור $a = 1$ אין פתרון, עבור $a \neq 1$ יש פתרון יחיד, ואין ערך של a שעבורו יש אינסוף פתרונות.

3.2.1 מערכת הומוגנית

תזכורת (מההרצאה)

האיברים החופשיים כולם 0. במקרה כזה:

- אפשר לרשום רק מטריצה מצומצמת ולא מורחבת, כי עמודת האפסים לא תושפע משום פעולה, אז מיותר לגרור את כתיבתה.
- תמיד יש פתרון: לא נוכל לקבל שורת סתירה ולכן אין מצב שאין פתרון. עדיין צריך לבדוק אם יש רק פתרון האפס או גם פתרונות לא אפסיים. מעל שדה אינסופי, קיום פתרון לא אפסי גורר אינסוף פתרונות.
- אם יש פתרון יחיד, זהו פתרון האפס שקוראים לו **הפתרון הטריטויאלי**.
- קבוצת הפתרונות של מערכת עם n משתנים היא תת מרחב וקטורי של $\mathbb{F}^n$ (תמיד ניתן להציג כ-span).

עבור אילו ערכים של $a \in \mathbb{R}$ למערכת המשוואות הבאה יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות, אפס פתרונות?

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ x + az = 0 \end{cases}$$

פתרון

נעבור למטריצה. נרשום רק את המטריצה המצומצמת, ונדרג. זו אותה מטריצה מתרגיל קודם ולכן נקבל מייד

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2-2a \end{pmatrix}$$

כמו קודם, נפריד למקרים:

מקרה: $2-2a \neq 0$, כלומר $a \neq 1$.

כמו קודם, נחלק בביטוי הזה כדי לקבל איבר מוביל 1.

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow \frac{1}{2-2a} R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - a R_3, R_2 \rightarrow R_2 - a R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כאן הפתרון הוא יחיד והוא $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, שנקרא כאמור פתרון האפס או הפתרון הטריטויאלי.

מקרה שני- $2-2a = 0$ כלומר $a = 1$. נציב ונקבל שורת אפסים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שני המשתנים הראשונים תלויים והשלישי חופשי. המשוואות הן

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \\ z = z \end{cases} \rightarrow S = \left\{ \begin{pmatrix} -s \\ -s \\ s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

לסיכום: עבור $a = 1$ יש אינסוף פתרונות, עבור $a \neq 1$ יש פתרון יחיד טריוויאלי, ואין ערך של a שעבורו אין פתרון.

תרגיל ממבחן

נעבוד מעל השדה $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, וכל החישובים הם מודולו 5. פתרו את המערכת הבאה כתלות בפרמטר $\omega \in \mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + \omega y + z = 2, \\ x + y + (\omega + 1)z = 1, \end{cases} \quad x, y, z \in \mathbb{Z}_5.$$

קבעו עבור אילו ערכי ω יש פתרון יחיד, אין פתרון, או יותר מפתרון אחד. בכל מקרה כתבו את קבוצת הפתרונות במפורש.

פתרון

נחסר את המשוואה הראשונה מכל אחת משתי המשוואות האחרות. נקבל מערכת שקולה מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ (\omega - 1)y = 1, \\ \omega z = 0. \end{cases}$$

היתרון בחיסור הוא שהמשוואות השנייה והשלישית כוללות כעת נעלם אחד כל אחת. נפריד למקרים לפני חלוקה בביטוי שתלוי בפרמטר.

1. אם $\omega = 1$, המשוואה השנייה היא $0 \cdot y = 1$. זוהי סתירה בשדה, ולכן

$$S_1 = \emptyset.$$

2. אם $\omega = 0$, המשוואה השנייה היא $-y = 1$, ולכן $y = 4$. המשוואה השלישית אינה מטילה הגבלה על z . נסמן $z = t \in \mathbb{Z}_5$, ואז

$$x = 1 - y - z = 1 - 4 - t = 2 - t \pmod{5}.$$

לכן יש בדיוק חמישה פתרונות:

$$\begin{aligned} S_0 &= \{(2 - t, 4, t) : t \in \mathbb{Z}_5\} \\ &= \{(2, 4, 0), (1, 4, 1), (0, 4, 2), (4, 4, 3), (3, 4, 4)\}. \end{aligned}$$

3. אם $\omega \in \{2, 3, 4\}$, אז גם ω וגם $\omega - 1$ שונים מאפס, ולכן הם הפיכים בשדה. נקבל

$$z = 0, \quad y = (\omega - 1)^{-1}, \quad x = 1 - (\omega - 1)^{-1}.$$

נחשב את ההופכיים במפורש:

$$1^{-1} = 1, \quad 2^{-1} = 3, \quad 3^{-1} = 2 \pmod{5}.$$

מכאן מתקבל פתרון יחיד בכל אחד משלושת המקרים:

$$S_2 = \{(0, 1, 0)\}, \quad S_3 = \{(3, 3, 0)\}, \quad S_4 = \{(4, 2, 0)\}.$$

בדיקת עזר: דטרמיננטת מטריצת המקדמים היא $\omega(\omega - 1)$, ולכן רק עבור $\omega = 0, 1$ נדרשת הבחנה בין סתירה לבין ריבוי פתרונות.

3.3 מרחבים וקטוריים

תזכורת (מההרצאה)

1. כדי להגדיר מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$ יש להגדיר פעולת חיבור בין וקטורים ב- V , ופעולת כפל בין וקטור ב- V וסקלר ב- $\mathbb{F}$ (שמקיימות את אקסיומות המרחב הוקטורי). כל זאת בנוסף לפעולות החיבור והכפל ב- $\mathbb{F}$. פעולת כפל בין שני וקטורים אינה חלק מאקסיומות המרחב הוקטורי; אם נשתמש בה בהמשך, נגדיר אותה בנפרד.
2. כל שדה הוא מרחב וקטורי מעל עצמו, עם פעולות החיבור והכפל של השדה.
3. מרחב וקטורי V מוגדר תמיד מעל שדה כלשהו $\mathbb{F}$. יש לציין תמיד את השדה מעליו עובדים. לדוגמה: ראיתם בהרצאה שניתן להתייחס ל- $\mathbb{C}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ או מעל $\mathbb{R}$. שימו לב שמדובר בשני מרחבים וקטוריים שונים.

3.12. דוגמה

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

- א. $\mathbb{F}^n$ - קבוצת ה- n -יות מעל $\mathbb{F}$ ($n \in \mathbb{N}$).
- ב. $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ - קבוצת המטריצות מסדר $m \times n$ מעל $\mathbb{F}$.
- ג. $\mathbb{F}[X]$ - קבוצת כל הפולינומים עם מקדמים מ- $\mathbb{F}$.

קבעו האם הקבוצות הבאות הן תתי מרחבים של $\mathbb{R}[X]$ מעל $\mathbb{R}$, ביחס לפעולות הרגילות:

1. $V = \{p(X) \in \mathbb{R}[X] : p(5) = 0, p(4) \neq 0\}$
2. $V = \{p(X) \in \mathbb{R}[X] : \exists c \in \mathbb{R}, p(c) = 0\}$

פתרון

1. לא. פולינום האפס אינו בקבוצה, מפני שערכו ב-4 הוא 0. אפשר לראות גם כשל בסגירות לחיבור: הפולינומים $p(X) = (X-5)(X-3)$ ו- $q(X) = (X-5)^2$ שייכים לקבוצה, שכן $p(4) = -1$ ו- $q(4) = 1$, אך

$$(p+q)(X) = (X-5)(2X-8), \quad (p+q)(4) = 0.$$

לכן $p+q$ אינו בקבוצה.

2. לא. הקבוצה אינה סגורה תחת חיבור. למשל: $-2X \in V$, אבל $(X+1)^2 - 2X = X^2 + 1 \notin V$.

3.4 תתי מרחבים

הגדרה פורמלית

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $U \subseteq V$ תת קבוצה המהווה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ בפני עצמה ביחס לפעולות החיבור והכפל בסקלר של V . אז U נקראת תת מרחב וקטורי של V .

3.14. טענה

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $U \subseteq V$ תת קבוצה. אז U היא תת מרחב וקטורי אם ורק אם מתקיימים כל התנאים הבאים:

1. $0 \in U$ (מדובר על אותו $0 \in V$).
2. U סגורה תחת חיבור.
3. U סגורה תחת כפל בסקלר.

3.15. דוגמה

1. $V = \{p(x) \in \mathbb{F}[X] \mid p(5) = 0\}$ הוא תת מרחב של $\mathbb{F}[X]$.

הוכחה:

- א. ברור ש $0 \in V$.
- ב. נניח $p(x), q(x) \in V$. נגדיר $r(x) = p(x) + q(x)$. מתקיים: $r(5) = p(5) + q(5) = 0$. לכן $r(x) \in V$.
- ג. נניח $p \in V$ ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$. נגדיר $r = \alpha p$. מתקיים: $r(5) = \alpha p(5) = 0$.

2. $V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_2 = 0\}$ (כאשר $n \geq 2$). זהו תת מרחב של $\mathbb{R}^n$.

הוכחה:

- א. ברור כי $0 \in V$.
- ב. נניח $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in V$, אז $x_2 = y_2 = 0$, ולכן הקואורדינטה השנייה בוקטור $x + y$ היא 0, כלומר $x + y \in V$.
- ג. אם $x \in V$, ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$, אז $\alpha x_2 = 0$ ולכן $\alpha x \in V$.

הוכיחו/הפריכו:

1. הקבוצה $U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ מהווה תת מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^2$.

2. קבוצת המטריצות הסימטריות $Sym_n(\mathbb{F}) := \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{F}) \mid A = A^T\}$ מהווה תת מרחב וקטורי של $M_{n \times n}(\mathbb{F})$.

פתרון

1. זה אינו תת מרחב וקטורי, למשל כי אין סגירות לחיבור: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1^2 \end{pmatrix} \in U$ אבל

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin U$$

2. מטריצת האפס סימטרית. נניח $A, B \in \text{Sym}_n(\mathbb{F})$ ו- $\lambda \in \mathbb{F}$. אז

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B,$$

ולכן $A + B$ סימטרית. כמו כן,

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda A,$$

ולכן λA סימטרית. שלושת תנאי מבחן תת המרחב מתקיימים.

מערכת חישה הנדסית מתארת אות מנורמל באמצעות פולינום ממשי ממעלה לכל היותר 3:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3.$$

הזמן t נמדד ביחידות זמן מנורמלות; מודל זה הוא קירוב מתמטי לאות, ללא הנחה על סוג החישה.

1. מצאו את כל הפולינומים המקיימים

$$p(0) = 0, \quad p(1) = 0.2, \quad p'(0) = 0, \quad p'(0.5) = 0.$$

האם קבוצת הפתרונות היא תת מרחב של $\mathbb{R}[t]$? האם $t = 0.5$ היא נקודת מקסימום או מינימום מקומית?

2. חזרו על השאלה כאשר נתוני המדידה משתנים ל-

$$p(0) = 0.1, \quad p(1) = 0.3, \quad p'(0) = 0, \quad p'(0.5) = 0.$$

3. לסעיף השני מוסיפים את המדידה $p'(1) = 0.4$. האם המערכת נשארת עקבית? האם קבוצת הפתרונות היא תת מרחב?

פתרון

נגזור את הפולינום:

$$p'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2.$$

סעיף 1. התנאים ב- $t = 0$ נותנים $a_0 = a_1 = 0$, ושני התנאים הנותרים נותנים

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = 0.2, \\ a_2 + 0.75a_3 = 0. \end{cases}$$

מחסרים את המשוואה השנייה מן הראשונה:

$$0.25a_3 = 0.2 \implies a_3 = 0.8, \quad a_2 = -0.75 \cdot 0.8 = -0.6.$$

לכן יש פתרון יחיד,

$$p_1(t) = -0.6t^2 + 0.8t^3.$$

בדיקה: $p_1(1) = -0.6 + 0.8 = 0.2$ וכן $p_1'(0.5) = -1.2 \cdot 0.5 + 2.4 \cdot 0.25 = 0$. קבוצת הפתרונות אינה תת מרחב: פולינום האפס אינו מקיים $p(1) = 0.2$. התנאי $p'(0.5) = 0$ לבדו מתאר נקודה ניחת, ולא בהכרח שיא. במקרה זה

$$p_1''(t) = -1.2 + 4.8t, \quad p_1''(0.5) = 1.2 > 0,$$

ולכן מדובר במינימום מקומי.

סעיף 2. הפעם $a_0 = 0.1$ ו- $a_1 = 0$. התנאי $p(1) = 0.3$ נותן $a_2 + a_3 = 0.2$, ולכן שתי המשוואות עבור a_2, a_3 זהות לאלה שבסעיף הראשון. נקבל

$$p_2(t) = 0.1 - 0.6t^2 + 0.8t^3 = p_1(t) + 0.1.$$

זהו שוב פתרון יחיד, וקבוצת הפתרונות אינה תת מרחב כי אינה מכילה את פולינום האפס. הנגזרות של p_1, p_2 זהות, ולכן גם כאן $t = 0.5$ היא נקודת מינימום מקומית.

סעיף 3. הפולינום היחיד מסעיף 2 מקיים

$$p'_2(1) = -1.2 + 2.4 = 1.2 \neq 0.4.$$

לפיכך התנאי הנוסף יוצר סתירה. אין פתרון, וקבוצת הפתרונות הריקה אינה תת מרחב משום שאינה מכילה את וקטור האפס. לעומתה, הקבוצה $\{0\}$ היא תת מרחב.

3.5 תרגילים משלימים: מדידות וספירת פתרונות

שלושה חיישנים מודדים סכומים של גדלי מצב ממשיים:

$$y_1 = x_1 + x_2 = 5, \quad y_2 = x_2 + x_3 = 7, \quad y_3 = x_1 + x_3 = 6.$$

שחזרו את שלושת הגדלים. חיישן בקרה מודד $y_4 = x_1 + x_2 + x_3$. מהי הקריאה העקבית שלו, ומה מסיקה הקריאה $y_4 = 10$ על המודל המדויק?

פתרון

מחברים את שתי המשוואות הראשונות ומחסרים את השלישית:

$$2x_2 = 5 + 7 - 6 = 6, \quad x_2 = 3.$$

מכאן $x_1 = 5 - 3 = 2$ ו- $x_3 = 7 - 3 = 4$. במשוואה השלישית מתקיים $2 + 4 = 6$. סכום שלוש הקריאות הוא פעמיים סכום הגדלים:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 2(x_1 + x_2 + x_3) = 2y_4.$$

לכן הקריאה העקבית היא $y_4 = (5 + 7 + 6)/2 = 9$. הקריאה 10 סותרת זאת, ולכן ארבע המשוואות אינן עקביות במודל המדויק. זו בדיקת עקביות, היכולה להעיד על שגיאת מדידה או על מודל שאינו מתאים.

פתרו מעל $\mathbb{F}_2$ את המערכת

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + z = 1. \end{cases}$$

כמה פתרונות יש? השוו למערכת עם אותן משוואות מעל $\mathbb{R}$.

פתרון

מעל $\mathbb{F}_2$, חיסור המשוואה השנייה מן הראשונה נותן $y = -1 = 1$. אם נסמן $z = t$, נקבל $x = 1 - t = 1 + t$ לכן

$$(x, y, z) = (1 + t, 1, t), \quad t \in \mathbb{F}_2.$$

יש בדיוק שני פתרונות: $(1, 1, 0)$ ו- $(0, 1, 1)$. מעל $\mathbb{R}$ פעולת החיסור נותנת $y = -1$, ומתקבל

$$(x, y, z) = (1 - t, -1, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

כאן יש אינסוף פתרונות. בשני המקרים יש משתנה חופשי אחד; מספר הפתרונות תלוי בשדה.

תרגול 4: תלות לינארית, פרישה וסכומי מרחבים

עיקרון מנחה

מטרות התרגול. נבדוק תלות ואי תלות, נמצא קבוצות פורשות ונבחין בין איחוד, חיתוך וסכום של תתי מרחבים. בכל בדיקה נציין את שדה הסקלרים ונקשר בין המשוואות לתמונה הגאומטרית.

4.1 מרחבים וקטוריים

תזכורת (מהרצאה)

1. כדי להגדיר מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$ יש להגדיר פעולת חיבור בין וקטורים ב- V , ופעולת כפל בין וקטור ב- V וסקלר ב- $\mathbb{F}$ (שמקיימות את אקסיומות המרחב הוקטורי). כל זאת **בנוסף** לפעולות החיבור והכפל ב- $\mathbb{F}$. פעולת כפל בין שני וקטורים אינה חלק מאקסיומות המרחב הוקטורי; אם נשתמש בה בהמשך, נגדיר אותה בנפרד.
2. כל שדה הוא מרחב וקטורי מעל עצמו, עם פעולות החיבור והכפל של השדה.
3. מרחב וקטורי V מוגדר תמיד מעל שדה כלשהו $\mathbb{F}$. יש לציין תמיד את השדה מעליו עובדים. לדוגמה: ראיתם בהרצאה שניתן להתייחס ל- $\mathbb{C}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ או מעל $\mathbb{R}$. שימו לב שמדובר בשני מרחבים וקטוריים שונים.

דוגמה 4.1.

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

א. $\mathbb{F}^n$ - קבוצת ה- n -יות מעל $\mathbb{F}$ ($n \in \mathbb{N}$).

ב. $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ - קבוצת המטריצות מסדר $m \times n$ מעל $\mathbb{F}$.

ג. $\mathbb{F}[X]$ - קבוצת כל הפולינומים עם מקדמים מ- $\mathbb{F}$.

קבעו האם הקבוצות הבאות הן תתי מרחבים של $\mathbb{R}[X]$ מעל $\mathbb{R}$, ביחס לפעולות הרגילות:

$$1. V = \{p(X) \in \mathbb{R}[X] : p(5) = 0, p(4) \neq 0\}$$

$$2. V = \{p(X) \in \mathbb{R}[X] : \exists c \in \mathbb{R}, p(c) = 0\}$$

פתרון

1. לא. פולינום האפס אינו בקבוצה, מפני שערכו ב-4 הוא 0. אפשר לראות גם כשל בסגירות לחיבור: הפולינומים $p(X) = (X-5)(X-3)$ ו- $q(X) = (X-5)^2$ שייכים לקבוצה, שכן $p(4) = -1$ ו- $q(4) = 1$, אך

$$(p+q)(X) = (X-5)(2X-8), \quad (p+q)(4) = 0.$$

לכן $p+q$ אינו בקבוצה.

2. לא. הקבוצה אינה סגורה תחת חיבור. למשל: $-2X \in V$, $(X+1)^2 \in V$ אבל $(X+1)^2 - 2X \notin V$.

4.1.1 תתי מרחבים

הגדרה פורמלית

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $U \subseteq V$ תת קבוצה המהווה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ בפני עצמה ביחס לפעולות החיבור והכפל בסקלר של V . אז נקראת תת מרחב וקטורי של V .

טענה 4.3

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $U \subseteq V$ תת קבוצה. אז U היא תת מרחב וקטורי אם ורק אם מתקיימים כל התנאים הבאים:

$$1. 0 \in U \text{ (מדובר על אותו } 0 \in V \text{)}.$$

$$2. U \text{ סגורה תחת חיבור.}$$

$$3. U \text{ סגורה תחת כפל בסקלר.}$$

דוגמה 4.4

$$1. V = \{p(x) \in \mathbb{F}[X] \mid p(5) = 0\} \text{ הוא תת מרחב של } \mathbb{F}[X].$$

הוכחה:

$$א. \text{ ברור ש } 0 \in V.$$

$$ב. \text{ נניח } p(x), q(x) \in V. \text{ נגדיר } r(x) = p(x) + q(x). \text{ מתקיים: } r(5) = p(5) + q(5) = 0. \text{ לכן } r(x) \in V.$$

$$ג. \text{ נניח } p \in V \text{ ויהי } \alpha \in \mathbb{F}. \text{ נגדיר } r = \alpha p. \text{ מתקיים: } r(5) = \alpha p(5) = 0.$$

$$2. V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_2 = 0\} \text{ (כאשר } n \geq 2 \text{)}. \text{ זהו תת מרחב של } \mathbb{R}^n.$$

הוכחה:

$$א. \text{ ברור כי } 0 \in V.$$

$$ב. \text{ נניח } x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in V, \text{ אז } x_2 = y_2 = 0, \text{ ולכן הקואורדינטה השנייה בוקטור } x+y \text{ היא } 0, \text{ כלומר } x+y \in V.$$

$$ג. \text{ אם } x \in V, \text{ ויהי } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ אז } \alpha x_2 = 0 \text{ ולכן } \alpha x \in V.$$

הוכחו/הפריכו:

1. הקבוצה $U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ מהווה תת מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^2$.
2. קבוצת המטריצות הסימטריות $Sym_n(\mathbb{F}) := \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{F}) \mid A = A^T\}$ מהווה תת מרחב וקטורי של $M_{n \times n}(\mathbb{F})$.

פתרון

1. זה אינו תת מרחב וקטורי, למשל כי אין סגירות לחיבור: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1^2 \end{pmatrix} \in U$ אבל

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin U$$

2. מטריצת האפס סימטרית. נניח $A, B \in Sym_n(\mathbb{F})$ ו- $\lambda \in \mathbb{F}$. אז

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B,$$

ולכן $A + B$ סימטרית. כמו כן,

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda A,$$

ולכן λA סימטרית. שלושת תנאי מבחן תת המרחב מתקיימים.

מערכת חישה הנדסית מתארת אות מנורמל באמצעות פולינום ממשי ממעלה לכל היותר 3:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3.$$

הזמן t נמדד ביחידות זמן מנורמלות; מודל זה הוא קירוב מתמטי לאות, ללא הנחה על סוג החישה.

1. מצאו את כל הפולינומים המקיימים

$$p(0) = 0, \quad p(1) = 0.2, \quad p'(0) = 0, \quad p'(0.5) = 0.$$

האם קבוצת הפתרונות היא תת מרחב של $\mathbb{R}[t]$? האם $t = 0.5$ היא נקודת מקסימום או מינימום מקומית?

2. חזרו על השאלה כאשר נתוני המדידה משתנים ל-

$$p(0) = 0.1, \quad p(1) = 0.3, \quad p'(0) = 0, \quad p'(0.5) = 0.$$

3. לסעיף השני מוסיפים את המדידה $p'(1) = 0.4$. האם המערכת נשארת עקבית? האם קבוצת הפתרונות היא תת מרחב?

פתרון

נגזור את הפולינום:

$$p'(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2.$$

סעיף 1. התנאים ב- $t = 0$ נותנים $a_0 = a_1 = 0$, ושני התנאים הנותרים נותנים

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = 0.2, \\ a_2 + 0.75a_3 = 0. \end{cases}$$

מחסרים את המשוואה השנייה מן הראשונה:

$$0.25a_3 = 0.2 \implies a_3 = 0.8, \quad a_2 = -0.75 \cdot 0.8 = -0.6.$$

לכן יש פתרון יחיד,

$$p_1(t) = -0.6t^2 + 0.8t^3.$$

בדיקה: $p_1(1) = -0.6 + 0.8 = 0.2$ וכן $p_1'(0.5) = -1.2 \cdot 0.5 + 2.4 \cdot 0.25 = 0$. קבוצת הפתרונות אינה תת מרחב: פולינום האפס אינו מקיים $p(1) = 0.2$. התנאי $p'(0.5) = 0$ לבדו מתאר נקודה ניחת, ולא בהכרח שיא. במקרה זה

$$p_1''(t) = -1.2 + 4.8t, \quad p_1''(0.5) = 1.2 > 0,$$

ולכן מדובר במינימום מקומי.

סעיף 2. הפעם $a_0 = 0.1$ ו- $a_1 = 0$. התנאי $p(1) = 0.3$ נותן $a_2 + a_3 = 0.2$, ולכן שתי המשוואות עבור a_2, a_3 זהות לאלה שבסעיף הראשון. נקבל

$$p_2(t) = 0.1 - 0.6t^2 + 0.8t^3 = p_1(t) + 0.1.$$

זהו שוב פתרון יחיד, וקבוצת הפתרונות אינה תת מרחב כי אינה מכילה את פולינום האפס. הנגזרות של p_1, p_2 זהות, ולכן גם כאן $t = 0.5$ היא נקודת מינימום מקומית.

סעיף 3. הפולינום היחיד מסעיף 2 מקיים

$$p_2'(1) = -1.2 + 2.4 = 1.2 \neq 0.4.$$

לפיכך התנאי הנוסף יוצר סתירה. אין פתרון, וקבוצת הפתרונות הריקה אינה תת מרחב משום שאינה מכילה את וקטור האפס. לעומתה, הקבוצה $\{0\}$ היא תת מרחב.

4.2 תלות ואי תלות לינארית

הגדרה פורמלית

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ותהי $S \subseteq V$.

1. הקבוצה S **תלויה לינארית** אם קיימים וקטורים שונים זה מזה $v_1, \dots, v_k \in S$ וסקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$, לא כולם אפס, כך ש-

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0.$$

2. הקבוצה S **בלתי תלויה לינארית** אם לכל בחירה סופית של וקטורים שונים זה מזה $v_1, \dots, v_k \in S$, השוויון לעיל מחייב $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$.

הווקטורים אינם חייבים להיות n -יות: הם יכולים להיות גם פולינומים, מטריצות או איברים של מרחב וקטורי אחר.

דוגמה 4.7.

הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ הינה ת"ל בגלל שמתקיים $1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$. אפשר לראות שאם נעביר אנף נוכל לבטא את האיבר $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ בעזרת האחרים.

איך נבדוק תלות?

עיקרון מנחה

- נכתוב מערכת הומוגנית (המשתנים הם מקדמי הצירוף הלינארי!).
- נעבור למטריצה ונדרג
- **בת"ל:** נקבל פתרון יחיד = הפתרון הטריוויאלי = פתרון האפס
- **תלות לינארית:** נקבל פתרון לא אפסי. מעל שדה אינסופי יהיו אז אינסוף פתרונות.
- נזכור שבמערכת הומוגנית תמיד יש פתרון כי אי אפשר לקבל שורת סתירה.

נתונים הווקטורים $v_1 = (1, 2, 0)^T, v_2 = (0, 1, 1)^T, v_3 = (2, 1, -3)^T$ ב- $\mathbb{R}^3$. קבעו אם הם תלויים לינארית. מצאו את כל יחסי התלות ובטאו וקטור אחד באמצעות האחרים.

פתרון

נכתוב $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$. השוואת הרכיבים נותנת

$$a + 2c = 0, \quad 2a + b + c = 0, \quad b - 3c = 0.$$

מן הראשונה $a = -2c$, ומהשלישית $b = 3c$; במשוואה השנייה מתקבל $-4c + 3c + c = 0$, ולכן אין תנאי נוסף. כל יחסי התלות הם

$$(a, b, c) = t(-2, 3, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

בפרט $-2v_1 + 3v_2 + v_3 = 0$, ולכן $v_3 = 2v_1 - 3v_2$. זהו יחס לא טריוויאלי. שני הווקטורים הראשונים בלתי תלויים, כי מהרכיב הראשון של $av_1 + bv_2 = 0$ נובע $a = 0$, ואחר כך $b = 0$.

4.2.1 קריטריונים שימושיים לתלות לינארית

1. קב' המכילה את וק' האפס היא תמיד ת ל

2. קב' שיש בה וקטור יחיד שאיננו וק' ה-0, היא תמיד בת ל

3. בדיקת תלות לינארית של קבוצה:

- בתרגול הקודם ראינו שאפשר לבדוק דרך התאפסות של הצירוף הלינארי: נקבל מערכת משוואות הומוגנית, נדרג ונבחן את מס' הפתרונות שלה.
- - תזכורת: אם יש רק פתרון אפס, הווקטורים בלתי תלויים; אם יש פתרון לא אפסי, הם תלויים.

- - דרך נוספת מההרצאה: לרשום את הוק' **כשורות** של מטריצה, לדרג, ואז נבדוק: אם יש שורות אפסים - ת, ל, אם אין שורות אפסים - בת, ל.
חשבו למה?

4.3 צירופים לינאריים

הגדרה פורמלית

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $v_1, \dots, v_k \in V$. וקטור $v \in V$ יקרא צירוף לינארי של $v_1, \dots, v_k$ אם קיימים $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{F}$ כך ש- $v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$.

האם המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ נמצאת בפרישה של $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ושל $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{R}$?
נמקו באמצעות השוואת רכיבים.

פתרון

לכל $a, b \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$aB_1 + bB_2 = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}.$$

שוויון למטריצה A מחייב בו זמנית $a = 2$ ו- $a = 5$, וזו סתירה. לכן A אינה בפרישה. העובדה ששורתה השנייה מתאימה ל- $b = -1$ אינה מספיקה: כל ארבעת הרכיבים חייבים להתאים יחד.

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{R}$. אפיינו את כל המטריצות B המקיימות $AB = BA$, והראו שכולן צירופים לינאריים של A ושל $I_2 - A$.

פתרון

נכתוב $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. מחשבים את שתי המכפלות בנפרד:

$$AB = \begin{pmatrix} 1a + 3c & 1b + 3d \\ 0a + 0c & 0b + 0d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 3c & b + 3d \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

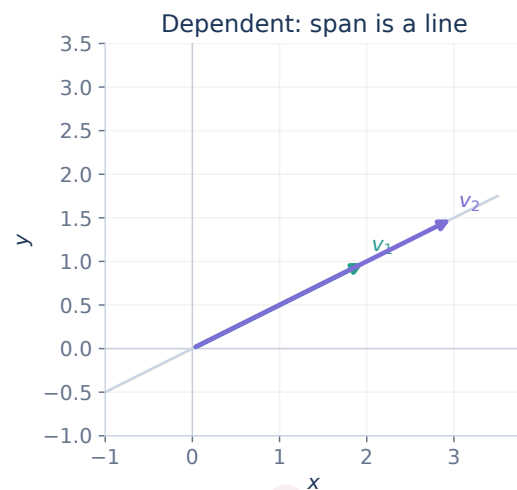
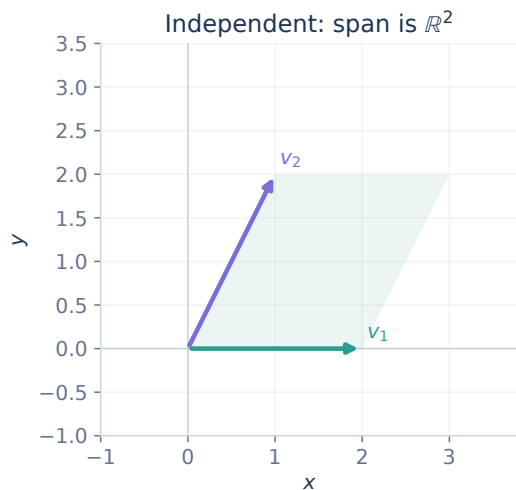
$$BA = \begin{pmatrix} a1 + b0 & a3 + b0 \\ c1 + d0 & c3 + d0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 3a \\ c & 3c \end{pmatrix}.$$

מהרכיב $(2, 1)$ נקבל $c = 0$, ומרכיב $(1, 2)$ נקבל $b = 3(a - d)$. שאר השוויונות מתקיימים אז אוטומטית. לכן

$$B = \begin{pmatrix} a & 3(a - d) \\ 0 & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aA + d(I_2 - A).$$

גם הכיוון ההפוך מתקיים: בהצבת $c = 0$, $b = 3(a - d)$ בשתי המכפלות מתקבל אותו ביטוי.

4.3.1 קבוצות פורשות



פרישה גאומטרית: וקטור לא אפסי פורש ישר דרך הראשית; שני וקטורים בלתי תלויים פורשים מישור דרך הראשית.

הגדרה פורמלית

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. עבור קבוצה $S \subseteq V$ (לאו דווקא סופית), נגדיר את $\text{span}_{\mathbb{F}} S$ להיות אוסף כל הצירופים הלינאריים הסופיים של איברים מ- S :

$$\text{span}_{\mathbb{F}} S = \left\{ \sum_{j=1}^k \alpha_j v_j \mid k \geq 0, v_j \in S, \alpha_j \in \mathbb{F} \right\}.$$

מתירים גם את הסכום הריק ($k=0$), שערכו וקטור האפס. בפרט, $\text{span}_{\mathbb{F}} \emptyset = \{0\}$.

הערה פורמלית

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. תהי $S \subset V$ תת קבוצה, אז $\text{span } S$ הנו תת מרחב של V .

הגדרה פורמלית

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. אם קיימת קבוצה $S \subset V$ כך ש- $V = \text{span } S$, נאמר ש- S פורשת את V ונקרא ל- S קבוצה פורשת. אם בנוסף נתון ש S סופית, נאמר כי V נוצר סופית.

הערה פורמלית

יש לשים לב מעל איזה שדה אנו עובדים. בהחלט יתכן כי קבוצה $S \subset V$ תהיה פורשת מעל שדה אחד, אבל לא מעל אחר. אם יתכנו כמה אפשרויות לשדות, נרשום $\text{span}_{\mathbb{F}} S$ כדי לציון שאנחנו מעל שדה $\mathbb{F}$.

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, ותהי $\emptyset \neq S \subseteq V$ ותהי k -סופית מגודל V - $v \in V$. אז

$$\text{Sp}(S \cup \{v\}) = \text{Sp}(S) \iff v \in \text{Sp}(S)$$

פתרון

$\implies$: נניח כי $\text{Sp}(S \cup \{v\}) = \text{Sp}(S)$. ניתן לרשום: $v = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_k + 1 \cdot v$. כלומר v ניתן להצגה כצירוף לינארי של איברי $S \cup \{v\}$ כלומר $v \in \text{Sp}(S \cup \{v\})$, מהנתון נובע ש- $v \in \text{Sp}(S)$.
 $\Leftarrow$: ההכלה $\text{Sp}(S \cup \{v\}) \supseteq \text{Sp}(S)$ מתקיימת תמיד, שכן כל $u \in \text{Sp}(S)$ ניתן להציג כהצגה לינארית של $S \cup \{v\}$ ע"י מתן מקדם 0 ל- v .
 בכיוון הפוך, נסמן $S = \{s_1, \dots, s_k\}$. יהי $x \in \text{Sp}(S \cup \{v\})$ משמע קיימים $a_1, \dots, a_{k+1} \in \mathbb{F}$ כך ש:

$$a_1 s_1 + \dots + a_k s_k + a_{k+1} v = x$$

לפי הנתון $v \in \text{Sp}(S)$ ולכן קיימים $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{F}$ כך ש- $b_1 s_1 + \dots + b_k s_k = v$. נציב זאת במשוואה מעלה ונקבל:

$$(a_1 + a_{k+1} b_1) s_1 + \dots + (a_k + a_{k+1} b_k) s_k = x$$

ולכן $x \in \text{Sp}(S)$ כנדרש.

מצאו קבוצה פורשת למרחב הפתרונות של המערכות ההומוגניות הבאות ב- $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x + z = 0. \end{cases} \quad 1.$$

$$y + z = 0 \quad 2.$$

פתרון

1. המשוואה השנייה נותנת $x = -z$, והראשונה נותנת $y = -x = z$. נסמן $z = t \in \mathbb{R}$. לכן

$$(x, y, z) = (-t, t, t) = t(-1, 1, 1),$$

ומתקבל

$$S_1 = \{t(-1, 1, 1) : t \in \mathbb{R}\} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{(-1, 1, 1)\}.$$

כל כפולה של הווקטור הנתון אכן מקיימת את שתי המשוואות, ולכן זו קבוצת הפתרונות כולה.

2. מן המשוואה $y + z = 0$ נקבל $y = -z$, ואילו x חופשי. נסמן $x = s, z = t$, כאשר $s, t \in \mathbb{R}$. אז

$$(x, y, z) = (s, -t, t) = s(1, 0, 0) + t(0, -1, 1).$$

לפיכך

$$S_2 = \text{span}_{\mathbb{R}}\{(1, 0, 0), (0, -1, 1)\}.$$

שני הווקטורים מקיימים את המשוואה, וכל פתרון קיבל את הצורה הנדרשת.

4.4 חיתוכים וסכומים של תת מרחבים

עיקרון מנחה

יש להבחין בין איחוד לסכום. למשל, שני צירי הקואורדינטות ב- $\mathbb{R}^2$ הם תתי מרחבים, אך איחודם אינו סגור לחיבור: $(1, 0)$ ו- $(0, 1)$ באיחוד, ואילו סכומם $(1, 1)$ אינו בו. סכום שני הצירים הוא המישור כולו.

תזכורת (מההרצאה)

יהי V מרחב וקטורי, $U, W \subseteq V$ תת מרחבים של V . הקבוצה

$$U \cap W = \{v \in V \mid v \in U \text{ וגם } v \in W\}$$

היא חיתוך המרחבים U ו- W .

הגדרה פורמלית

יהי V מרחב וקטורי, $U, W \subseteq V$ תת מרחבים של V . נגדיר את הקבוצה $U + W$ באופן הבא

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

אז $U + W$ הינו תת-מרחב וקטורי של V המכיל את U ו- W .
אם בנוסף מתקיים $U \cap W = \{0\}$, נסמן: $U \oplus W$. זהו סכום ישר.

נסמן: קבוצת המטריצות הסימטריות: $\text{Sym}(\mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid A = A^T\}$
קבוצת המטריצות האנטי סימטריות: $\text{aSym}(\mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid A = -A^T\}$
הוכיחו כי $\text{Sym}(\mathbb{F})$, $\text{aSym}(\mathbb{F})$ תת מרחבים של $M_n(\mathbb{F})$, ובנוסף הוכיחו כי אם $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$, כלומר $1 + 1 \neq 0$ בשדה, אז:
 $M_n(\mathbb{F}) = \text{Sym}(\mathbb{F}) \oplus \text{aSym}(\mathbb{F})$.

פתרון

נראה כי $\text{Sym}(\mathbb{F})$ תת מרחב. עבור $\text{aSym}(\mathbb{F})$, מטריצת האפס שייכת לקבוצה, ואם $A^T = -A$, אז $B^T = -B$ ו- $\lambda \in \mathbb{F}$.

$$(A + B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A + B), \quad (\lambda A)^T = \lambda A^T = -\lambda A.$$

לכן גם קבוצת המטריצות האנטי סימטריות סגורה לחיבור ולכפל בסקלר, והיא תת מרחב.
יהיו $\lambda \in \mathbb{F}$, $A, B \in \text{Sym}(\mathbb{F})$.

ראשית, ברור ש $0 \in \text{Sym}(\mathbb{F})$.

נראה סגירות לחיבור: מתקיים $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$ ולכן גם $A + B$ מטריצה סימטרית.
לבסוף, סגירות לכפל בסקלר: לפי כללי השחלוף מתקיים $(\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda A$ ולכן גם λA מטריצה סימטרית.

כדי להראות שזהו סכום ישר, נראה ראשית שזהו סכום, ואז שהחיתוך הוא אפס.
כדי להראות שזהו סכום ישר, נראה ראשית שזהו סכום, ואז שהחיתוך הוא אפס.
כדי להראות שזהו סכום ישר, נראה ראשית שזהו סכום, ואז שהחיתוך הוא אפס.

1. כיוון: $M_n(\mathbb{F}) \supseteq \text{Sym}(\mathbb{F}) + \text{aSym}(\mathbb{F})$. ברור, כי $\text{Sym}(\mathbb{F})$, $\text{aSym}(\mathbb{F})$ הם תת מרחבים של $M_n(\mathbb{F})$.

2. כיוון: $M_n(\mathbb{F}) \subseteq \text{Sym}(\mathbb{F}) + \text{aSym}(\mathbb{F})$.

תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. מתקיים: $A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}$. נשים לב ש $\frac{A+A^T}{2}$ היא מטריצה סימטרית כי

$$\left(\frac{A+A^T}{2}\right)^T = \frac{A^T + (A^T)^T}{2} = \frac{A+A^T}{2}$$

וכן $\frac{A-A^T}{2}$ היא מטריצה אנטי סימטרית כי

$$\left(\frac{A-A^T}{2}\right)^T = \frac{A^T - (A^T)^T}{2} = \frac{A^T - A}{2} = -\frac{A-A^T}{2}$$

מכאן ש- $M_n(\mathbb{F}) \subseteq \text{Sym}(\mathbb{F}) + \text{aSym}(\mathbb{F})$.

כעת נוכיח ש $\text{Sym}(\mathbb{F}) \cap \text{aSym}(\mathbb{F}) = \{0\}$. תהי $A \in \text{Sym}(\mathbb{F}) \cap \text{aSym}(\mathbb{F})$. A סימטרית, ולכן $A = A^T$. מצד שני, A אנטי סימטרית, ולכן $-A = A^T$. נשווה ונקבל: $A = -A$ ובפרט נקבל ש $a_{ij} = -a_{ij}$ לכל $1 \leq i, j \leq n$. מכאן: $a_{ij} + a_{ij} = 2a_{ij} = 0$. מכיוון שהנחנו $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$, מתקיים $a_{ij} = 0$ לכל i, j . ולכן $A = 0$ כנדרש.

תזכורת (מההרצאה)

במאפיין 2 מתקיים $-A = A$, ולכן התנאים $A^T = A$ ו- $A^T = -A$ זהים. זו הסיבה המדויקת לכך שהפירוק הסימטרי והאנטי סימטרי באמצעות חלוקה ב-2 דורש מאפיין שונה מ-2.

4.5 תרגילים משלימים: פרישה, יתירות ושדה הסקלרים

שלושה רכיבי אות מקיימים אילוץ איזון $x + y + z = 0$. נסמן

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\},$$

$$u = (1, -1, 0), \quad v = (0, 1, -1), \quad w = (1, 0, -1).$$

הראו ש- $U = \text{span}_{\mathbb{R}}\{u, v\}$, בדקו אם u, v בלתי תלויים, והסבירו מה משתנה כאשר מוסיפים את w לקבוצה הפורשת. האם האילוץ $x + y + z = 1$ מגדיר תת מרחב?

פתרון

כל צירוף $au + bv = (a, -a + b, -b)$ מקיים שסכום רכיביו אפס, ולכן שייך ל- U . להפך, יהי $(x, y, z) \in U$. אז $y = -x - z$, ולכן

$$(x, y, z) = (x, -x - z, z) = x(1, -1, 0) - z(0, 1, -1) = xu - zv.$$

שתי ההכללות נותנות $U = \text{span}\{u, v\}$. אם $au + bv = 0$, הקואורדינטה הראשונה נותנת $a = 0$ והשלישית $-b = 0$. לכן הזוג בלתי תלוי. מכיוון ש- $w = u + v$, הוספתו משאירה את הפרישה ללא שינוי ויוצרת את התלות $u + v - w = 0$. האילוץ $x + y + z = 1$ אינו מגדיר תת מרחב, מפני שווקטור האפס אינו מקיים אותו. הוא מתאר מישור מוזן, המקביל למישור U .

התבוננו בקבוצה $S = \{1, i\} \subseteq \mathbb{C}$. בדקו תלות לינארית ופרישה מעל $\mathbb{R}$, ואחר כך מעל $\mathbb{C}$.

פתרון

מעל $\mathbb{R}$, אם $a + bi = 0$ עם $a, b \in \mathbb{R}$, השוואת החלק הממשי והמדומה נותנת $a = b = 0$. לכן S בלתי תלויה. כל $z = x + iy$ נכתב $x \cdot 1 + y \cdot i$, ולכן $\text{span}_{\mathbb{R}} S = \mathbb{C}$. מעל $\mathbb{C}$ מותר לבחור מקדמים מרוכבים, ומתקיים

$$i \cdot 1 + (-1) \cdot i = 0.$$

זהו צירוף מאפס עם מקדמים לא אפסיים, ולכן S תלויה. היא עדיין פורשת: לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $z = z \cdot 1$. בפרט, מעל $\mathbb{C}$ כבר $\{1\}$ פורשת.

נוצר על ידי חן גדי

תרגול 5: פעולות במטריצות, בסיס וממד

עיקרון מנחה

מטרות התרגול. נלמד לחשב עם מטריצות תוך בדיקת ממדים וסדר הכפל, לזהות מבנה סימטרי, ולבחור בסיסים. נחבר בין חישוב אלגברי לבין שאלות על סכום וחיתוך של תתי מרחבים.

5.1 אריתמטיקה של מטריצות - פעולות חשבון

בכל הסעיף, יהיו $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

5.1.1 כפל מטריצה בסקלר

מוגדר לכל מטריצה שהיא. כופלים את כל איברי המטריצה בסקלר $(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot (A)_{ij}$

5.1. דוגמה

נחשב את $7 \cdot A = \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 & 7 \cdot 5 \\ 7 \cdot 2 & 7 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 35 \\ 14 & 21 \end{pmatrix}$

5.1.2 חיבור וחיסור מטריצות

מוגדר רק לשתי מטריצות באותה צורה בדיוק. מחברים או מחסרים איברים במקומות התואמים $(A \pm B)_{ij} = (A)_{ij} \pm (B)_{ij}$

5.2. דוגמה

- נחשב את $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 5+1 \\ 2+3 & 3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

5.1.3 כפל מטריצות

מוגדר רק עבור מטריצות שיש התאמה בין מספר העמודות של הראשונה (השמאלית) למספר השורות של השנייה (הימנית).

אם $A_{k \times m}$, $B_{m \times n}$ אז המכפלה $(AB)_{k \times n}$ מוגדרת:

$$(AB)_{ij} = \sum_{r=1}^m a_{ir} b_{rj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

זהו האיבר של המכפלה, בשורה i ובעמודה j .

“רצים” על השורה i של A והעמודה j של B . בשתייהן יש m איברים, נכפול אותם בהתאמה ונסכום.

נשים לב שאם המכפלה AB מוגדרת, אז **לא בהכרח** המכפלה BA מוגדרת. בסימונים שלעיל, נצטרך שיתקיים $n = k$.

חשבו את המכפלות AB, BA עבור המטריצות שהוגדרו קודם.

פתרון

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 5 \cdot 6 \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 31 \\ 11 & 20 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 & 3 \cdot 5 + 6 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 15 & 33 \end{pmatrix}.$$

בכל רכיב חיברנו את מכפלות הרכיבים המתאימים בשורה ובעמודה. ההבדל בין שתי התוצאות נובע משינוי השורות והעמודות המשתתפות בכל מכפלה.

הערה פורמלית

מסקנה חשובה כפל מטריצות אינו חילופי! כלומר אין הכרח שיתקיים $AB = BA$. בדוגמה שחישבנו מתקיים $AB \neq BA$, אף ששתי המכפלות מוגדרות.

תהי $A_{k \times m}$ מטריצה עם שורת אפסים, ותהי $B_{m \times n}$. הוכיחו כי ל- $(AB)_{k \times n}$ יש שורת אפסים.

פתרון

נסמן ב- i את שורת האפסים של A ($1 \leq i \leq k$). כלומר $(A)_{ir} = 0$ לכל $1 \leq r \leq m$. כעת, נתבונן בשורה i של המכפלה AB . לכל $1 \leq j \leq n$,

$$(AB)_{ij} = \sum_{r=1}^m (A)_{ir} (B)_{rj} = \sum_{r=1}^m 0 = 0$$

קיבלנו שכל האיברים בשורה i של AB הם 0, אכן יש לה שורת אפסים.
מטריצת ה-0: מטריצה בכל גודל, שכל אבריה 0.

5.2 מטריצות אלכסוניות

מטריצה אלכסונית: מטריצה ריבועית שכל האיברים שאינם על האלכסון הראשי הם 0.

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \text{ עבור המטריצה } \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

$$[D]_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ d_{ij} \equiv d_i & i = j \end{cases} \text{ צורת כתיבה נוספת:}$$

מטריצה סקלרית: מקרה פרטי של מטריצה אלכסונית שבה כל איברי האלכסון שווים.

מטריצת היחידה: מטריצה אלכסונית שכל ערכיה על האלכסון הנם 1. (מקרה פרטי של סקלרית).

- לאור סימון זה, ניתן לרשום מטריצה סקלרית בצורה aI , כאשר a הוא האיבר שמופיע בכל האלכסון.

- נסמן I_n כאשר היא מגודל $n \times n$, או רק I כאשר הגודל ברור.

- לכל מטריצה $A_{n \times m}$ מתקיים $A \cdot I_m = I_n \cdot A = A$.

דוגמה 5.5.

$$I \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A, \quad A \cdot I = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

יהיו A, B מטריצות אלכסוניות מסדר n . הוכיחו:

1. הסכום $A + B$ הוא מטריצה אלכסונית.
2. המכפלה $A \cdot B$ היא גם מטריצה אלכסונית ומתקיים $[AB]_{ii} = a_{ii}b_{ii}$ לכל $1 \leq i \leq n$.
3. A, B מתחלפות בכפל. כלומר מתקיים $AB = BA$.

פתרון

1. לכל $i \neq j$ מתקיים $(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = 0 + 0 = 0$. לכן $A+B$ אלכסונית, ואיבר האלכסון שלה הוא $(A+B)_{ii} = a_{ii} + b_{ii}$.

2. לפי הגדרת הכפל,

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

בשורה i של A רק a_{ii} עשוי להיות שונה מאפס, ולכן הסכום מצטמצם ל- $a_{ii}b_{ij}$. אם $i \neq j$ אז $b_{ij} = 0$, ולכן $(AB)_{ij} = 0$. אם $i = j$ אז $(AB)_{ii} = a_{ii}b_{ii}$. מכאן ש- AB אלכסונית.

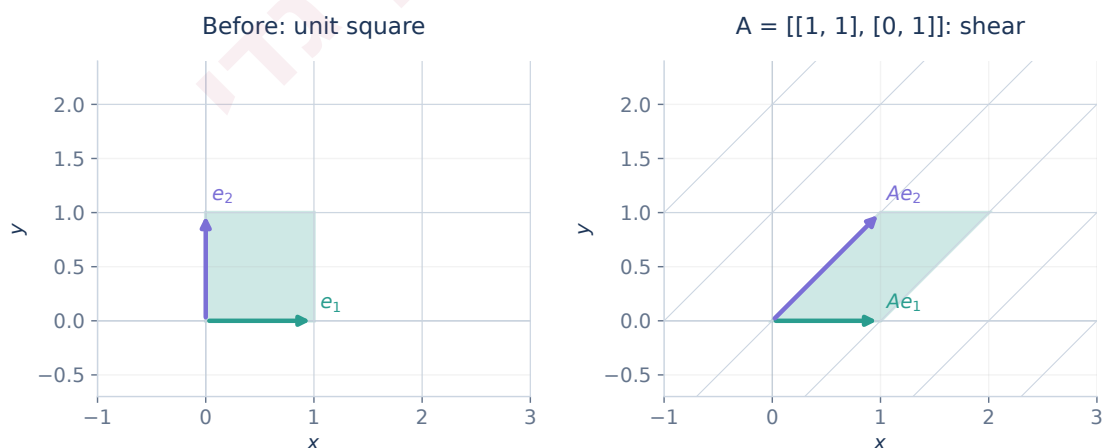
3. באותו אופן BA אלכסונית ואיבר האלכסון שלה הוא $b_{ii}a_{ii}$. כיוון שהסקלרים בשדה מתחלפים בכפל,

$$a_{ii}b_{ii} = b_{ii}a_{ii} \quad (1 \leq i \leq n).$$

כל הרכיבים של AB ושל BA שווים, ולכן $AB = BA$.

הערה פורמלית

בדיקת ממדים לפני חישוב. למכפלה $A_{k \times m} B_{m \times n}$ יש k שורות ו- n עמודות. שוויון מטריצות מחייב גם שוויון ממדים וגם שוויון בכל רכיב.



פעולה לינארית מעבירה רשת ישרה לרשת ישרה. עמודות המטריצה מתארות את תמונות וקטורי הבסיס.

5.3 שחלוף (טרנספוז)

- מוגדר לכל מטריצה A^T נקראת המטריצה המשוכלפת. $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$
- מחליפים את השורות להיות עמודות, ואת העמודות להיות שורות.
- מתקיים: אם $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ אז $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$. (כמות השורות וכמות העמודות מתחלפות)

5.7. דוגמה

תהי $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ אז $C^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$.
למטריצה C יש 3 שורות ו-2 עמודות. לאחר השחלוף, קיבלנו מטריצה עם 3 עמודות ו-2 שורות.

5.4 סימטריה ואנטי-סימטריה

- מטריצה ריבועית A היא סימטרית אם $A^T = A$
- מטריצה ריבועית A היא אנטי-סימטרית אם $A^T = -A$
- כל מטריצה אלכסונית היא סימטרית (ובפרט, כל מטריצה סקלרית, ובפרט, I). - ריבועית: נזכור כי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ואילו $A^T \in \mathbb{F}^{n \times m}$. נוכל להשוות ביניהן רק כאשר יהיו מאותו גודל בדיוק, כלומר כאשר $n = m$ בלבד.
- הסבר אינטואיטיבי: סימטריה - שיקוף סביב האלכסון. אנטי-סימטריה: שיקוף סביב האלכסון והחלפת סימן.

בדקו האם המטריצות הבאות הן סימטריות, אנטי-סימטריות, או אינן משתייכות לאף אחת משתי הקבוצות.

פתרון

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. קיבלנו $A^T = A$ - סימטרית.
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. קיבלנו $-B^T = -B$ - אנטי סימטרית.
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ -5 & 0 \end{pmatrix}, C^T = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$. קיבלנו $-C^T \neq C$ - חסרת סימטריה.

ראיתם בכיתה: אם A, B סימטריות, אז סכומן סימטרי, כפל בסקלר סימטרי. (התרגיל נמצא גם בסוף הקובץ).

הוכיחו או הפריכו:

1. אם A, B סימטריות אז AB סימטרית.
2. אם A, B אינן סימטריות, אז גם AB אינה סימטרית.

פתרון

א. ננסה להבין אם זה נכון או לא. נבדוק: $(AB)^T = B^T A^T = BA$. המעבר הראשון - תכונה שלמדנו בכיתה. המעבר השני - מהנתון שהן סימטריות.

וראינו כבר ש- BA לא תמיד שווה ל- AB . לכן נפריך את הטענה ע"י דוגמה נגדית: $AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ וקיבלנו $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ שתי המטריצות סימטריות, ומכפלתן אינה סימטרית.

ב. דוגמה נגדית: ניקח למשל $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. שתיהן אינן סימטריות.

נחשב: $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ זו מטריצה אלכסונית ולכן סימטרית. הפרכנו את הטענה.

תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ כאשר $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$. הוכיחו:

1. $A + A^T$ היא מטריצה סימטרית.

2. $A - A^T$ היא אנטי-סימטרית.

3. ניתן לרשום את A כסכום של מטריצה סימטרית ומטריצה אנטי-סימטרית.

פתרון

1. מתקיים $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$.

2. מתקיים $(A - A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T)$, ולכן המטריצה אנטי-סימטרית.

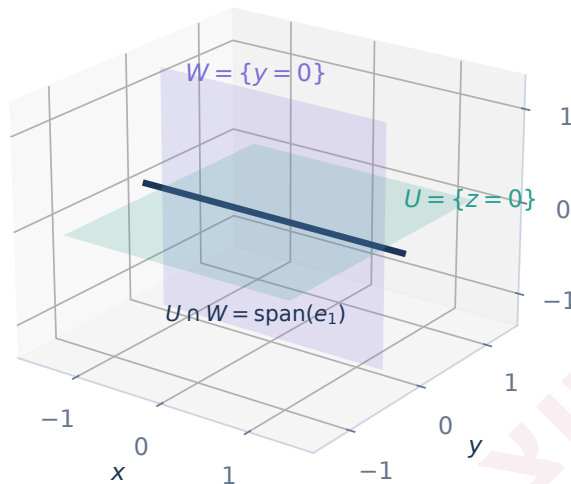
3. נחבר את שתי המטריצות מהסעיפים הקודמים:

$$\begin{aligned} 2A &= (A + A^T) + (A - A^T) \\ A &= \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) \end{aligned}$$

וכפי שראינו בסעיפים קודמים, המטריצה הראשונה היא סימטרית והשנייה אנטי-סימטרית.

5.5 חיתוכים וסכומים של תת מרחבים

Two planes, one common direction



שני מישורים שונים דרך הראשית ב- $\mathbb{R}^3$ עשויים להיחתך בישר. כאן $U = \{z = 0\}$, $W = \{y = 0\}$, ולכן $U \cap W = \text{span}(e_1)$ ו- $U + W = \mathbb{R}^3$.

תזכורת (מההרצאה)

יהי V מרחב וקטורי, $U, W \subseteq V$ תת מרחבים של V . הקבוצה

$$U \cap W = \{v \in V \mid v \in U \text{ וגם } v \in W\}$$

היא חיתוך המרחבים U ו- W .

הגדרה פורמלית

יהי V מרחב וקטורי, $U, W \subseteq V$ תת מרחבים של V . נגדיר את הקבוצה $U + W$ באופן הבא

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

אז $U + W$ הינו תת-מרחב וקטורי של V המכיל את U ו- W .
אם בנוסף מתקיים $U \cap W = \{0\}$, נסמן: $U \oplus W$. זהו סכום ישיר.

נסמן: קבוצת המטריצות הסימטריות: $\text{Sym}(\mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid A = A^T\}$
קבוצת המטריצות האנטי סימטריות: $\text{aSym}(\mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid A = -A^T\}$
הוכיחו כי $\text{Sym}(\mathbb{F})$, $\text{aSym}(\mathbb{F})$ תת מרחבים של $M_n(\mathbb{F})$, ובנוסף כי לכל $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$:
 $M_n(\mathbb{F}) = \text{Sym}(\mathbb{F}) \oplus \text{aSym}(\mathbb{F})$

פתרון

נראה כי $\text{Sym}(\mathbb{F})$ תת מרחב. עבור המרחב האנטי-סימטרי מתקיים באותו אופן

$$0^T = -0, \quad (A+B)^T = -A-B = -(A+B), \quad (\lambda A)^T = -\lambda A,$$

ולכן גם הוא תת מרחב. עבור המרחב הסימטרי:

יהיו $\lambda \in \mathbb{F}$, $A, B \in \text{Sym}(\mathbb{F})$.

ראשית, ברור ש $0 \in \text{Sym}(\mathbb{F})$.

נראה סגירות לחיבור: מתקיים $(A+B)^T = A^T + B^T = A+B$ ולכן גם $A+B$ מטריצה סימטרית. לבסוף, סגירות לכפל בסקלר: לפי כללי השחלוף מתקיים $(\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda A$ ולכן גם λA מטריצה סימטרית.

כדי להראות שזהו סכום ישר, נראה ראשית שזהו סכום, ואז שהחיתוך הוא אפס.

כדי להראות $M_n(\mathbb{F}) = \text{Sym}(\mathbb{F}) + \text{aSym}(\mathbb{F})$. נראה הכלה דו כיוונית:

1. כיוון: $M_n(\mathbb{F}) \supseteq \text{Sym}(\mathbb{F}) + \text{aSym}(\mathbb{F})$. ברור, כי $\text{Sym}(\mathbb{F})$, $\text{aSym}(\mathbb{F})$ הם תת מרחבים של $M_n(\mathbb{F})$.

2. כיוון: $M_n(\mathbb{F}) \subseteq \text{Sym}(\mathbb{F}) + \text{aSym}(\mathbb{F})$.

תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$.

מתקיים: $A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}$. נשים לב ש $\frac{A+A^T}{2}$ היא מטריצה סימטרית כי

$$\left(\frac{A+A^T}{2}\right)^T = \frac{A^T + (A^T)^T}{2} = \frac{A+A^T}{2}$$

וכן $\frac{A-A^T}{2}$ היא מטריצה אנטי סימטרית כי

$$\left(\frac{A-A^T}{2}\right)^T = \frac{A^T - (A^T)^T}{2} = \frac{A^T - A}{2} = -\frac{A-A^T}{2}$$

מכאן ש- $M_n(\mathbb{F}) \subseteq \text{Sym}(\mathbb{F}) + \text{aSym}(\mathbb{F})$.

כעת נוכיח ש $\text{Sym}(\mathbb{F}) \cap \text{aSym}(\mathbb{F}) = \{0\}$. תהי $A \in \text{Sym}(\mathbb{F}) \cap \text{aSym}(\mathbb{F})$. A סימטרית, ולכן $A = A^T$. מצד שני, A אנטי סימטרית, ולכן $-A = A^T$. נשווה ונקבל: $A = -A$ ובפרט נקבל ש $a_{ij} = -a_{ij}$ לכל $1 \leq i, j \leq n$. מכאן: $a_{ij} + a_{ij} = 2a_{ij} = 0$. מכיוון שהנחנו שהשדה שאנו עובדים מעליו הוא ממאפיין שונה מ-2, מתקיים $2 \neq 0$, ולכן כדי לקיים את המשוואה נצטרך לדרוש $a_{ij} = 0$ לכל i, j . מכאן ש $A = 0$, כנדרש.

5.6 בסיס וממד

הגדרה פורמלית

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. נאמר שהקבוצה $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq V$ היא **בסיס** של V אם היא **בלתי תלויה לינארית** וגם פורשת את V .

למרחב וקטורי מממד סופי עשויים להיות בסיסים רבים, אך מספר האיברים בכל בסיס זהה. מספר זה נקרא **ממד המרחב**.

5.12. דוגמה

$\dim(\mathbb{F}_n[x]) = n + 1, \dim(M_{n \times m}(\mathbb{F})) = nm, \dim(\mathbb{F}^n) = n$
 למרחבים המוכרים יש בסיסים שנקראים סטנדרטיים, מסומנים על ידי $e_1, e_2, \dots, e_{\dim(V)}$.
 למשל: ב- $\mathbb{R}^2$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ב- $\mathbb{R}_2[x]$: $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2$.

תזכורת (מההרצאה)

כדי להראות שקבוצה היא בסיס במרחב וקטורי מממד ידוע n , די לאמת כל שתיים משלוש התכונות הבאות:

1. בת"ל
2. פורשת
3. בקבוצה יש בדיוק n איברים (מספר השווה לממד המרחב)

בדקו אם הווקטורים

$$v_1 = (1, 0, i)^T, \quad v_2 = (1 + i, 1, 0)^T, \quad v_3 = (2 + i, 1 + i, 1 + 2i)^T$$

מהווים בסיס של $\mathbb{C}^3$. אם לא, הציגו יחס תלות מפורש.

פתרון

לשלושה וקטורים ב- $\mathbb{C}^3$ מספיק לבדוק אי תלות. נרכיב אותם בעמודות ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+i \\ 0 & 1 & 1+i \\ i & 0 & 1+2i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - iR_1} \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+i \\ 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 1-i & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - (1-i)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+i \\ 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

בצעד האחרון השתמשנו ב- $(1-i)(1+i) = 2$. הדרגה היא 2, ולכן הקבוצה אינה בסיס. כדי לזהות את יחס התלות, נבדוק ישירות:

$$(2-i)v_1 + (1+i)v_2 = \begin{pmatrix} (2-i) + (1+i)^2 \\ 1+i \\ (2-i)i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1+i \\ 1+2i \end{pmatrix} = v_3.$$

כלומר $(2-i)v_1 + (1+i)v_2 - v_3 = 0$ הוא יחס לא טריוויאלי, המאמת את הדירוג.

קבעו אם הקבוצה $B = (x^2 - 1, 2x + 3, 1 + x + x^2)$ היא בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$, ואחר כך אם היא בסיס של $\mathbb{R}_3[x]$. אם היא בסיס במקרה הראשון, מצאו את קואורדינטות הפולינום $p(x) = ax^2 + bx + c$.

פתרון

מוסכמתנו היא ש- $\mathbb{R}_j[x]$ כולל פולינומים מדרגה לכל היותר j . נחפש α, β, γ כך ש-

$$ax^2 + bx + c = \alpha(x^2 - 1) + \beta(2x + 3) + \gamma(1 + x + x^2).$$

השוואת מקדמים נותנת

$$\alpha + \gamma = a, \quad 2\beta + \gamma = b, \quad -\alpha + 3\beta + \gamma = c.$$

מן השנייה $\gamma = b - 2\beta$, ומן הראשונה $\alpha = a - b + 2\beta$. הצבה בשלישית נותנת

$$-(a - b + 2\beta) + 3\beta + b - 2\beta = c \iff -a + 2b - \beta = c.$$

לכן

$$\beta = -a + 2b - c, \quad \gamma = 2a - 3b + 2c, \quad \alpha = -a + 3b - 2c.$$

לכל a, b, c יש פתרון יחיד, ולכן B בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$, ו-

$$[p]_B = (-a + 3b - 2c, -a + 2b - c, 2a - 3b + 2c)^T.$$

לעומת זאת, B אינו פורש את $\mathbb{R}_3[x]$: כל צירוף שלו הוא מדרגה לכל היותר 2, ולכן אינו יכול להיות x^3 .

נתון בסיס של $\mathbb{R}^3$ $\{u, v, w\}$. האם הקבוצות הבאות הן גם בסיסים של $\mathbb{R}^3$?

$$1. \{u, u + v, u - v\}$$

$$2. \left\{\frac{1}{2}u, \frac{1}{3}v, \frac{1}{4}w\right\}$$

$$3. \{u + v + w, u + 2v, v - w\}$$

פתרון

בכל קבוצה יש שלושה וקטורים במרחב מממד 3, ולכן די לבדוק אי-תלות לינארית כדי להכריע אם היא בסיס.

1. יהיו $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ כך ש- $\alpha_1 u + \alpha_2(u + v) + \alpha_3(u - v) = 0$. נסדר:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)u + (\alpha_2 - \alpha_3)v + 0 \cdot w = 0$$

מכיוון ש- $\{u, v, w\}$ בסיס, הווקטורים בלתי תלויים לינארית ולכן חייב להתקיים שמקדמי הצירוף (אחרי הסידור) כולם 0.

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

קיבלנו שיש פתרון לא טריויאלי עבור המקדמים: $\alpha_2 = \alpha_3$ ו- $\alpha_1 = -2\alpha_3$. לכן הקבוצה אינה בלתי תלויה לינארית ואינה בסיס.

2. יהיו $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ כך ש- $\alpha_1 \frac{1}{2}u + \alpha_2 \frac{1}{3}v + \alpha_3 \frac{1}{4}w = 0$. מכיוון ש- $\{u, v, w\}$ בסיס, חייב להתקיים: $\frac{\alpha_1}{2} = 0, \frac{\alpha_2}{3} = 0, \frac{\alpha_3}{4} = 0$. ולכן הקבוצה בלתי תלויה לינארית.

3. יהיו $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ כך ש- $\alpha_1(u + v + w) + \alpha_2(u + 2v) + \alpha_3(v - w) = 0$.

$$(\alpha_1 + \alpha_2)u + (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)v + (\alpha_1 - \alpha_3)w = 0$$

מכיוון ש $\{u, v, w\}$ בסיס, חייב להתקיים

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

נעבור למטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו שיש פתרון מלבד הפתרון הטריטיואלי ולכן הקבוצה תלויה לינארית ולכן אינה בסיס.

5.7 משפט הממד

5.16. טענה

יהיו V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$ ו- U תת-מרחב של V . אז

$$1. \dim(U) \leq \dim(V) \text{ ו-} U \text{ נוצר סופית}$$

$$2. \dim(U) = \dim(V) \text{ אם ורק אם } U = V.$$

משפט הממד:

5.17. טענה

יהי V מרחב וקטורי מממד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$. יהיו $U, W \subseteq V$ תת-מרחבים. אז

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

1. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ מממד n . יהיו $U, W \subseteq V$ תתי מרחבים של V כך ש-
 $\dim(U) = n - 1$ ו- $W \not\subseteq U$. הוכיחו:

$$(א) \quad V = U + W$$

$$(ב) \quad \dim(U \cap W) = \dim(W) - 1$$

2. יהיו $V = \mathbb{R}_2[X]$, $U = \text{span}(X, X^2 + 1)$ ו- $W = \{P \in V \mid P'(1) = 0\}$.

(א) חשבו את $\dim(U + W)$ ו- $\dim(U \cap W)$.

(ב) האם $U + W = V$? אם כן, האם זהו סכום ישר? כלומר האם $U \oplus W = V$?

פתרון

1. (א) מהנתון, קיים $x \in W \setminus U$. לכן $U \subsetneq U + W \subseteq V$ ולכן מחלק 1 של המשפט

$$n - 1 = \dim(U) < \dim(U + W) \leq \dim(V) = n$$

לכן אנו מסיקים כי $\dim(U + W) = n$. ולכן מחלק 2 של המשפט $V = U + W$.

(ב) נשתמש במשפט הממד:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

$$n = n - 1 + \dim W - \dim(U \cap W)$$

ולכן $\dim(U \cap W) = \dim(W) - 1$ כמבוקש.2. (א) מתקיים $\dim(V) = 3$, ואילו $\dim(U) = 2$ (זוהי קבוצה בלתי תלויה לינארית עם 2 איברים)נשים לב כי $W \not\subseteq U$, למשל עבור $Q(X) = 1$ מתקיים כי $Q \in W \setminus U$.
מתקיימים כל תנאי סעיף א', ולכן מ-(1) נקבל $V = U + W$ ולכן $\dim(U + W) = \dim V = 3$.מסעיף (2) מתקיים $\dim(U \cap W) = \dim(W) - 1$, ולכן מספיק שנחשב את $\dim(W)$.
יהי $P(X) = aX^2 + bX + c \in W$ עבור $a, b, c \in \mathbb{R}$ הדרישה היא $P'(1) = 2a + b = 0$,
כלומר $b = -2a$. אזי:

$$W = \{aX^2 - 2aX + c \mid a, c \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{a(X^2 - 2X) + c \cdot 1 \mid a, c \in \mathbb{R}\}$$

$$= \text{span}\{1, X^2 - 2X\}.$$

כלומר, $\dim(W) = 2$ ולכן $\dim(U \cap W) = 1$.(ב) זהו אכן סכום: מתקיים $U + W \subseteq V$, וקיבלנו $\dim(U + W) = \dim V$.
אז בסך הכול $U + W = V$.
הסכום אינו ישר. אכן,

$$(X - 1)^2 = (X^2 + 1) - 2X \in U, \quad \left. \frac{d}{dX}(X - 1)^2 \right|_{X=1} = 0,$$

ולכן $(X - 1)^2 \in W$. למעשה $U \cap W = \text{span}\{(X - 1)^2\}$, בהתאם לממד 1 שחישבנו.

תוכנת שרטוט מפעילה מתיחה וגזירה במישור:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

חשבו רכיב אחר רכיב את DH ואת HD , השוו את השפעתן על e_2 , ומצאו את כל v שעבורם $DHv = HDv$.**פתרון**

לפי הגדרת הכפל, כל כניסה היא סכום מכפלות שורה בעמודה:

$$DH = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$HD = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

לכן $DHe_2 = (6, 1)^T$ ואילו $HDe_2 = (2, 1)^T$. הפעולה הימנית מתבצעת תחילה, וסדר הפעולות משנה את התוצאה. עבור $v = (x, y)^T$ הפרש התוצאות הוא $((3x + 6y) - (3x + 2y), y - y)^T = (4y, 0)^T$. לפיכך התוצאות שוות אם ורק אם $y = 0$, כלומר על $\text{span}\{e_1\}$ בדיוק.

תרגול 6: בסיסים, הפיכות ומטריצות אלמנטריות

עיקרון מנחה

מטרות התרגול. נבסס בחירה והשלמה של בסיסים, נלמד לזהות מטריצה הפיכה ולחשב את ההופכית שלה, ונקשר את דירוג השורות למכפלה של מטריצות אלמנטריות. נבדוק כל פתרון גם באמצעות המשמעות שלו למערכת משוואות.

6.1 בסיס וממד

הגדרה פורמלית

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. נאמר שהקבוצה $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq V$ היא **בסיס** של V אם היא **בלתי תלויה לינארית** וגם **פורשת את V** .

למרחב וקטורי מממד סופי עשויים להיות בסיסים רבים, אך מספר האיברים בכל בסיס זהה. מספר זה נקרא **ממד המרחב**.

דוגמה 6.1

$\dim(\mathbb{F}^n) = n$
 $\dim(M_{n \times m}(\mathbb{F})) = nm$
 $\dim(\mathbb{F}_n[x]) = n + 1$
למרחבים המוכרים יש בסיסים שנקראים סטנדרטיים, מסומנים על ידי $e_1, e_2, \dots, e_{\dim(V)}$.
למשל: ב- $\mathbb{R}^2$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
ב- $\mathbb{R}_2[x]$, $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$.

תזכורת (מההרצאה)

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ונניח ש- V מממד סופי, כלומר $\dim(V) < \infty$.

1. אם B_1, B_2 הם שני בסיסים של V , אז מספר האיברים שלהם זהה:

$$|B_1| = |B_2|.$$

מכאן נובע שהממד של V מוגדר היטב, שכן $\dim(V)$ מוגדר להיות גודל כל בסיס של V .
 2. אם $W = \{w_1, \dots, w_m\} \subset V$ היא קבוצה בלתי תלויה לינארית, אז מספר האיברים שלה חסום על ידי הממד:

$$|W| = m \leq \dim(V).$$

כלומר, אי אפשר לקחת יותר וקטורים בלתי תלויים לינארית ממספר הווקטורים בבסיס.

3. אם $W = \{w_1, \dots, w_m\} \subset V$ היא קבוצה פורשת את V , כלומר

$$V = \text{span}(W),$$

אז מספר האיברים שלה אינו יכול להיות קטן מהממד:

$$|W| = m \geq \dim(V).$$

כלומר, כל קבוצה פורשת חייבת להכיל לפחות $\dim(V)$ וקטורים.

4. אם $W = \{w_1, \dots, w_m\} \subset V$ היא קבוצה כך ש:

$$\dim(V) = |W| = m,$$

• W או בלתי תלויה לינארית, או פורשת את V .

אז בהכרח W היא בסיס של V . במקרה שבו W בת"ל ומכילה בדיוק $\dim(V)$ וקטורים, אין אפשרות להוסיף עוד וקטורים חדשים מבלי ליצור תלות, ולכן היא כבר פורשת. במקרה שבו W פורשת ומכילה בדיוק $\dim(V)$ וקטורים, לא ייתכן צירוף לינארי מאפס לא טריוואלי ביניהם, ולכן הם בת"ל.

טענה 6.2.

נוספת לכך עובדה חשובה:

יהא V מרחב וקטורי מממד n , ותהא $W = \{w_1, \dots, w_k\} \subset V$ קבוצה בלתי תלויה לינארית, עם $k \leq n$. אז קיימת קבוצה

$$U = \{u_{k+1}, \dots, u_n\} \subset V$$

כך שהאיחוד

$$B = W \cup U = \{w_1, \dots, w_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$$

הוא בסיס של V .

כלומר, **כל קבוצה בלתי תלויה לינארית במרחב מממד סופי ניתנת להשלמה לבסיס**. זהו כלי מרכזי בבניית בסיסים ובחישובי ממד.

תזכורת (מההרצאה)

כדי להראות שקבוצה היא בסיס במרחב וקטורי מממד ידוע n , די לאמת כל שתיים משלוש התכונות הבאות:

1. בת"ל

2. פורשת

3. בקבוצה יש בדיוק n איברים (מספר השווה לממד המרחב)

בדקו אם הווקטורים

$$v_1 = (1, 0, i)^T, \quad v_2 = (1 + i, 1, 0)^T, \quad v_3 = (2 + i, 1 + i, 1 + 2i)^T$$

מהווים בסיס של $\mathbb{C}^3$. אם לא, הציגו יחס תלות מפורש.**פתרון**לשלושה וקטורים ב- $\mathbb{C}^3$ מספיק לבדוק אי תלות. נרכיב אותם בעמודות ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+i \\ 0 & 1 & 1+i \\ i & 0 & 1+2i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - iR_1} \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+i \\ 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 1-i & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - (1-i)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+i \\ 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

בצעד האחרון השתמשנו ב- $(1-i)(1+i) = 2$. הדרגה היא 2, ולכן הקבוצה אינה בסיס. כדי לזהות את יחס התלות, נבדוק ישירות:

$$(2-i)v_1 + (1+i)v_2 = \begin{pmatrix} (2-i) + (1+i)^2 \\ 1+i \\ (2-i)i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1+i \\ 1+2i \end{pmatrix} = v_3.$$

כלומר $(2-i)v_1 + (1+i)v_2 - v_3 = 0$ הוא יחס לא טריוויאלי, המאמת את הדירוג.קבעו אם הקבוצה $B = (x^2 - 1, 2x + 3, 1 + x + x^2)$ היא בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$, ואחר כך אם היא בסיס של $\mathbb{R}_3[x]$. אם היא בסיס במקרה הראשון, מצאו את קואורדינטות הפולינום $p(x) = ax^2 + bx + c$.**פתרון**מוסכמתנו היא ש- $\mathbb{R}_j[x]$ כולל פולינומים מדרגה לכל היותר j . נחפש α, β, γ כך ש-

$$ax^2 + bx + c = \alpha(x^2 - 1) + \beta(2x + 3) + \gamma(1 + x + x^2).$$

השוואת מקדמים נותנת

$$\alpha + \gamma = a, \quad 2\beta + \gamma = b, \quad -\alpha + 3\beta + \gamma = c.$$

מן השנייה $\gamma = b - 2\beta$, ומן הראשונה $\alpha = a - b + 2\beta$. הצבה בשלישית נותנת

$$-(a - b + 2\beta) + 3\beta + b - 2\beta = c \iff -a + 2b - \beta = c.$$

לכן

$$\beta = -a + 2b - c, \quad \gamma = 2a - 3b + 2c, \quad \alpha = -a + 3b - 2c.$$

לכל a, b, c יש פתרון יחיד, ולכן B בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$, ו-

$$[p]_B = (-a + 3b - 2c, -a + 2b - c, 2a - 3b + 2c)^T.$$

לעומת זאת, B אינו פורש את $\mathbb{R}_3[x]$: כל צירוף שלו הוא מדרגה לכל היותר 2, ולכן אינו יכול להיות x^3 .

נעבוד מעל $\mathbb{R}$. אותה הוכחה תקפה לכל שדה $\mathbb{F}$ ממאפיין שונה מ-2, לאחר החלפת שדה הסקלרים בכל ההגדרות.
נסמן

$$M_4 := M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$$

מרחב כל המטריצות 4×4 עם מקדמים ממשיים.
נסמן ב E_{ij} את המטריצה שברכיב (i, j) יש 1 ובשאר הרכיבים 0.
נגדיר שני תתי מרחבים של M_4 :

$$Sym_4(\mathbb{R}) := \{A \in M_4 \mid A^T = A\} \quad \text{מטריצות סימטריות,}$$

$$ASym_4(\mathbb{R}) := \{A \in M_4 \mid A^T = -A\} \quad \text{מטריצות אנטי סימטריות.}$$

נגדיר את המטריצות הבאות:

$$\begin{aligned} D_i &:= E_{ii} \quad (1 \leq i \leq 4), \\ S_{ij} &:= E_{ij} + E_{ji} \quad (1 \leq i < j \leq 4), \\ K_{ij} &:= E_{ij} - E_{ji} \quad (1 \leq i < j \leq 4). \end{aligned}$$

1. הראו כי הקבוצה

$$\mathcal{B}_{\text{sym}} := \{D_1, D_2, D_3, D_4, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{23}, S_{24}, S_{34}\}$$

היא בסיס של $Sym_4(\mathbb{R})$.

2. הראו כי הקבוצה

$$\mathcal{B}_{\text{skew}} := \{K_{12}, K_{13}, K_{14}, K_{23}, K_{24}, K_{34}\}$$

היא בסיס של $ASym_4(\mathbb{R})$.

3. הראו כי האיחוד

$$\mathcal{B} := \mathcal{B}_{\text{sym}} \cup \mathcal{B}_{\text{skew}}$$

הוא בסיס של M_4 . כלומר, בסיס של תת המרחב $Sym_4(\mathbb{R})$ הושלם לבסיס של כל M_4 על ידי הוספת וקטורים מ $ASym_4(\mathbb{R})$.

4. חשבו את הממדים

$$\dim(Sym_4(\mathbb{R})), \quad \dim(ASym_4(\mathbb{R})), \quad \dim(M_4),$$

והראו מפורשות כי

$$\dim(Sym_4(\mathbb{R})) + \dim(ASym_4(\mathbb{R})) = \dim(M_4).$$

הסבירו בקצרה איך הפירוק

$$M_4 = Sym_4(\mathbb{R}) \oplus ASym_4(\mathbb{R})$$

מתבטא ברמת הבסיסים ובחישוב הממד.

פתרון

1. $\mathcal{B}_{\text{sym}}$ בסיס של $Sym_4(\mathbb{R})$.

קודם נראה שכל איבר בקבוצה הוא סימטרי:

$$D_i^T = D_i, \quad S_{ij}^T = (E_{ij} + E_{ji})^T = E_{ji} + E_{ij} = S_{ij}.$$

לכן $\mathcal{B}_{\text{sym}} \subset \text{Sym}_4(\mathbb{R})$.

פורשות: יהי $A = (a_{kl}) \in \text{Sym}_4(\mathbb{R})$. עבור $1 \leq i \leq 4$ האיבר a_{ii} באלכסון מתקבל על ידי $a_{ii}D_i$. עבור $1 \leq i < j \leq 4$ מתקיים $a_{ij} = a_{ji}$, ואפשר לכתוב את התרומה לזוג הזה כ $a_{ij}S_{ij}$.

לכן:

$$A = \sum_{i=1}^4 a_{ii}D_i + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} a_{ij}S_{ij}.$$

כלומר A צירוף לינארי של איברי $\mathcal{B}_{\text{sym}}$, ולכן $\text{Sym}_4(\mathbb{R}) \subset \text{span}(\mathcal{B}_{\text{sym}})$. **אי תלות לינארית:** נניח שיש יחס

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i D_i + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \beta_{ij} S_{ij} = 0.$$

נסתכל על רכיב (i, i) . רק D_i תורם לשם, ולכן נקבל

$$\alpha_i = 0 \quad \forall i.$$

כעת נסתכל על רכיב (i, j) עם $i < j$. רק S_{ij} תורם לשם, וערך הכניסה הוא β_{ij} . מן השוויון למטריצת האפס נקבל

$$\beta_{ij} = 0 \quad \forall i < j.$$

מכאן שכל המקדמים מתאפסים, ולכן $\mathcal{B}_{\text{sym}}$ בת"ל.

סיכום: $\mathcal{B}_{\text{sym}}$ פורשת ובת"ל, לכן בסיס של $\text{Sym}_4(\mathbb{R})$.

בנוסף, לגודל הקבוצה:

$$|\mathcal{B}_{\text{sym}}| = 4 + 6 = 10,$$

ולכן

$$\dim(\text{Sym}_4(\mathbb{R})) = 10.$$

2. $\mathcal{B}_{\text{skew}}$ בסיס של $\text{ASym}_4(\mathbb{R})$.

קודם נראה שכל איבר אנטי סימטרי:

$$K_{ij}^T = (E_{ij} - E_{ji})^T = E_{ji} - E_{ij} = -K_{ij},$$

ולכן $K_{ij} \in \text{ASym}_4(\mathbb{R})$.

פורשות: יהי $A = (a_{kl}) \in \text{ASym}_4(\mathbb{R})$. עבור מטריצה אנטי סימטרית מתקיים:

$$a_{ii} = 0 \quad \forall i, \quad a_{ji} = -a_{ij} \quad \text{עבור } i < j.$$

לכן מספיק לקבוע את a_{ij} עבור $1 \leq i < j \leq 4$, והכניסות שמתחת לאלכסון נקבעות אוטומטית.

אפשר לכתוב

$$A = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} a_{ij} K_{ij},$$

כי $K_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$ נותן בדיוק את הזוג (i, j) ו (j, i) עם סימנים הפוכים.

מכאן שכל $A \in \text{ASym}_4(\mathbb{R})$ נמצא ב $\text{span}(\mathcal{B}_{\text{skew}})$.

אי תלות לינארית: נניח שיש יחס

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 4} \gamma_{ij} K_{ij} = 0.$$

ברכיב (i, j) עם $i < j$ נקבל שהכניסה היא בדיוק γ_{ij} . מן השוויון למטריצת האפס נובע

$$\gamma_{ij} = 0 \quad \forall i < j.$$

שוב כל המקדמים אפס, ולכן $\mathcal{B}_{\text{skew}}$ בת"ל.

מספר האיברים:

$$|\mathcal{B}_{\text{skew}}| = 6,$$

ולכן

$$\dim(ASym_4(\mathbb{R})) = 6.$$

3. האיחוד $\mathcal{B}$ בסיס של M_4 והשלמה לבסיס.

ראשית נשים לב שמבחינה רעיונית:

- $\mathcal{B}_{\text{sym}}$ הוא בסיס של תת המרחב $Sym_4(\mathbb{R})$,
- $\mathcal{B}_{\text{skew}}$ הוא בסיס של תת המרחב $ASym_4(\mathbb{R})$,
- החיתוך של שני המרחבים הוא בדיוק $\{0\}$.

נזכיר את הפירוק הקלאסי: לכל $A \in M_4$ נגדיר

$$S := \frac{1}{2}(A + A^T), \quad K := \frac{1}{2}(A - A^T).$$

אז:

$$S^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = S, \quad K^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -K,$$

ולכן $S \in Sym_4(\mathbb{R})$ ו $K \in ASym_4(\mathbb{R})$, ובנוסף

$$A = S + K.$$

כלומר:

$$M_4 = Sym_4(\mathbb{R}) + ASym_4(\mathbb{R}).$$

נבדוק שהחיתוך טריוויאלי: אם $A \in Sym_4(\mathbb{R}) \cap ASym_4(\mathbb{R})$, אז $A^T = A$ וגם $A^T = -A$, ולכן

$$A = -A \Rightarrow 2A = 0 \Rightarrow A = 0$$

(כי עובדים מעל $\mathbb{R}$, ו $2 \neq 0$). לכן

$$Sym_4(\mathbb{R}) \cap ASym_4(\mathbb{R}) = \{0\}.$$

מכאן

$$M_4 = Sym_4(\mathbb{R}) \oplus ASym_4(\mathbb{R}).$$

עכשיו לבסיס:

- $\mathcal{B}_{\text{sym}}$ בסיס של $Sym_4(\mathbb{R})$
- $\mathcal{B}_{\text{skew}}$ בסיס של $ASym_4(\mathbb{R})$
- $Sym_4(\mathbb{R}) \cap ASym_4(\mathbb{R}) = \{0\}$.

לכן האיחוד

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\text{sym}} \cup \mathcal{B}_{\text{skew}}$$

הוא בסיס של הסכום הישר $Sym_4(\mathbb{R}) \oplus ASym_4(\mathbb{R})$, כלומר בסיס של כל M_4 .

במילים אחרות:

- התחלנו מ $\mathcal{B}_{\text{sym}}$ בסיס של תת מרחב מט' סימטריות,
- השלמנו אותו לבסיס של כל M_4 על ידי הוספת איברי $\mathcal{B}_{\text{skew}}$,
- זה מימוש קונקרטי של המשפט "כל בסיס של תת מרחב ניתן להשלים לבסיס של המרחב כולו".

4. כבר מצאנו:

$$\dim(\text{Sym}_4(\mathbb{R})) = 10, \quad \dim(\text{ASym}_4(\mathbb{R})) = 6.$$

מצד שני, M_4 הוא מרחב כל המטריצות 4×4 , אז

$$\dim(M_4) = 16.$$

אכן:

$$\dim(\text{Sym}_4(\mathbb{R})) + \dim(\text{ASym}_4(\mathbb{R})) = 10 + 6 = 16 = \dim(M_4).$$

זה בדיוק מה שצריך לקרות כאשר יש לנו פירוק ישר:

$$M_4 = \text{Sym}_4(\mathbb{R}) \oplus \text{ASym}_4(\mathbb{R}).$$

איך לחשוב על זה:

- מטריצה סימטרית נקבעת על ידי האלכסון (4 כניסות) ומה שמעל האלכסון (6 כניסות). זה נותן 10 פרמטרים חופשיים.
- מטריצה אנטי סימטרית צריכה אפסים על האלכסון וכניסות מתחת לאלכסון מוכתבות על ידי האלו שמעל עם סימן מינוס. זה נותן 6 פרמטרים חופשיים.
- יחד יש $10 + 6$ פרמטרים, שזה בדיוק מספר הכניסות במטריצה 4×4 .
- הבסיס המאוחד $\mathcal{B}$ הוא פשוט "פירוק" של כל יחידת מטריצה E_{ij} לחלק סימטרי וחלק אנטי סימטרי.

6.2 משפט הממד

טענה 6.6

יהיו V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$ ו- U תת-מרחב של V . אז

$$1. \dim(U) \leq \dim(V) \text{ ו-} \dim(U) \leq \dim(V)$$

$$2. \dim(U) = \dim(V) \text{ אם ורק אם } U = V.$$

משפט הממד:

טענה 6.7

יהי V מרחב וקטורי מממד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$. יהיו $U, W \subseteq V$ תת-מרחבים. אז

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

1. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ מממד n . יהיו $U, W \subseteq V$ תתי מרחבים של V כך ש-
 $\dim(U) = n - 1$ ו- $W \not\subseteq U$. הוכיחו:

$$V = U + W \quad (\text{א})$$

$$\dim(U \cap W) = \dim(W) - 1 \quad (\text{ב})$$

2. יהיו $V = \mathbb{R}_2[X]$, $U = \text{span}(X, X^2 + 1)$ ו- $W = \{P \in V \mid P'(1) = 0\}$.

(א) חשבו את $\dim(U + W)$ ו- $\dim(U \cap W)$.

(ב) האם $U + W = V$? אם כן, האם זהו סכום ישיר? כלומר האם $U \oplus W = V$?

פתרון

1. (א) מהנתון, קיים $x \in W \setminus U$. לכן $U \subsetneq U + W \subseteq V$ ולכן מחלק 1 של המשפט

$$n - 1 = \dim(U) < \dim(U + W) \leq \dim(V) = n$$

לכן אנו מסיקים כי $\dim(U + W) = n$. ולכן מחלק 2 של המשפט $V = U + W$.

(ב) נשתמש במשפט הממד:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

$$n = n - 1 + \dim W - \dim(U \cap W)$$

ולכן $\dim(U \cap W) = \dim(W) - 1$ כמבוקש.

2. (א) מתקיים $\dim(V) = 3$, ואילו $\dim(U) = 2$ (זוהי קבוצה בלתי תלויה לינארית עם 2 איברים)

נשים לב כי $W \not\subseteq U$, למשל עבור $Q(X) = 1$ מתקיים כי $Q \in W \setminus U$.

מתקיימים כל תנאי סעיף א', ולכן מ-(1) נקבל $V = U + W$ ולכן $\dim(U + W) = \dim V = 3$.

מסעיף (2) מתקיים $\dim(U \cap W) = \dim(W) - 1$, ולכן מספיק שנחשב את $\dim(W)$.
 יהי $P(X) = aX^2 + bX + c \in W$ עבור $a, b, c \in \mathbb{R}$ הדרישה היא $P'(1) = 2a + b = 0$,
 כלומר $b = -2a$. אז:

$$W = \{aX^2 - 2aX + c \mid a, c \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{a(X^2 - 2X) + c \cdot 1 \mid a, c \in \mathbb{R}\}$$

$$= \text{span}\{1, X^2 - 2X\}.$$

כלומר, $\dim(W) = 2$ ולכן $\dim(U \cap W) = 1$.

(ב) זהו אכן סכום: מתקיים $U + W \subseteq V$, וקיבלנו $\dim(U + W) = \dim V$,

אז בסך הכול $U + W = V$.

הסכום אינו ישיר. אכן,

$$(X - 1)^2 = (X^2 + 1) - 2X \in U, \quad \left. \frac{d}{dX}(X - 1)^2 \right|_{X=1} = 0,$$

ולכן $(X - 1)^2 \in W$. למעשה $U \cap W = \text{span}\{(X - 1)^2\}$, בהתאם לממד 1 שחישבנו.

עיקרון מנחה

מן הבסיס אל שחזור יחיד. עמודות של מטריצה ריבועית מהוות בסיס אם ורק אם כל וקטור אגף ימין נכתב באמצעותן באופן יחיד. זו המשמעות של הפיכות, והיא מסבירה מדוע ההופכית פותרת מערכת לכל אגף ימין.

6.3 מטריצות הפיכות

הגדרה פורמלית

מטריצה ריבועית A נקראת **הפיכה** אם קיימת מטריצה B עבורה $AB = BA = I$.

את ההופכית (היחידה!) B מסמנים במקרה זה ב- A^{-1} .

תכונות בסיסיות

תזכורת (מההרצאה)

- אם A הפיכה אז גם A^{-1} הפיכה.
- אם A ו- B הפיכות אז גם $A \cdot B$ הפיכה ומתקיים $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
- אם A הפיכה אז גם A^T הפיכה ומתקיים $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- מטריצת היחידה הפיכה ומתקיים $I = I^{-1}$.
- מטריצת אפס ריבועית אינה הפיכה.

6.3.1 תרגילים - אלגברה של מטריצות הפיכות

תהינה A, B מטריצות ריבועיות, הפיכה A , המקיימות: $A = B^2$ וגם $B = A^2$. הוכיחו כי B היא ההופכית של A , כלומר $B = A^{-1}$.

פתרון

מתקיים

$$\begin{aligned} AB &= AA^2 = A^3, \\ A^3 &= A^3(AA^{-1}) = A^4 A^{-1} \\ &= (A^2 A^2) A^{-1} = B^2 A^{-1} = AA^{-1} = I. \end{aligned}$$

מכיוון ש- $B = A^2$, מתקיים גם $BA = A^2 A = A^3 = AB = I$. לכן $AB = BA = I$ ו- $B = A^{-1}$.

תהינה המטריצות הריבועיות A, B כך ש- AB הפיכה. הוכיחו כי A וגם B הפיכות. **(כיוון הפוך של הטענה מהרצאה)**

פתרון

נשתמש בעובדה שלמטריצות ריבועיות מסדר זה, הופכית חד-צדדית היא גם הופכית דו-צדדית. אכן $AX = I$ גורר $n = \text{rank}(AX) \leq \text{rank}(A) \leq n$, ולכן A הפיכה. מתקיים $(AB)(AB)^{-1} = I$ כלומר $A[B(AB)^{-1}] = I$ אז A הפיכה וההופכית שלה $B(AB)^{-1}$. באותו אופן $(AB)^{-1}(AB) = I$ כלומר $[(AB)^{-1}A]B = I$ אז B הפיכה וההופכית שלה $(AB)^{-1}A$.

6.3.2 אלגוריתם למציאת הופכית

6.11. טענה

A הפיכה אם ורק אם A שקולת שורות למטריצת היחידה.

אלגוריתם:

1. נרשום $(A | I)$ ונדרג, כאשר המטרה היא להביא את החלק השמאלי לצורה **קנונית**.
2. נבדוק את הצורה הקנונית שקיבלנו בצד שמאל:
 - אם קיבלנו את I : אז A הפיכה, ובצד ימין נמצאת ההופכית המבוקשת, כלומר נקבל $(I | A^{-1})$.
 - אם **לא** קיבלנו את I : אז המטריצה A איננה הפיכה.

בדקו אם שתי המטריצות הבאות הפיכות. לכל מטריצה הפיכה חשבו הופכית בדירוג ובדקו את התוצאה:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

פתרון

נדרג את המטריצה המורחבת $(A | I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

לאחר $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$ מתקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

לבסוף $R_1 \leftarrow R_1 - 3R_3$ נותן

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

לכן $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. לאימות, מכפלת A בהופכית מחזירה בשורותיה בהתאמה את שורתה השנייה, את שורתה הראשונה ועוד שלוש פעמים השלישית, ואת סכום השנייה והשלישית:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3-3 & 1 & -3+3 \\ 1-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

במטריצה B השורה השנייה היא $3/2$ פעמים הראשונה. לכן $R_2 \leftarrow R_2 - (3/2)R_1$ יוצר שורת אפסים; B אינה הפיכה.

6.4 מטריצות אלמנטריות

הגדרה פורמלית

- מטריצות אלמנטריות אלו מטריצות ריבועיות שמייצגות את פעולות השורה האלמנטריות של הדירוג.
- פעולת שורה אלמנטרית על מטריצה שקולה לכפל של המטריצה במטריצה האלמנטרית המתאימה (משמאל).
- כל מטריצה אלמנטרית נוצרת ע"י הפעלת הפעולה המתאימה על מטריצת היחידה.

מסקנה : A, B שקולות שורה אם קיימת סדרה סופית של מטריצות אלמנטריות כך ש
 $B = E_1 E_2 \dots E_k A$

1. **החלפת שורה** i עם שורה j תסומן באמצעות המטריצה $E_{i,j}^{(1)}$.

$$E_{i,j}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 1 & \\ & 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

- מטריצה זו הפוכה לעצמה (כלומר מחליפים שוב את שתי השורות)

2. **הכפלת שורה** i בסקלר $\lambda \neq 0$ תסומן באמצעות המטריצה $E_{i,\lambda}^{(2)}$.

$$E_{i,\lambda}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- המטריצה ההפוכה לה היא $E_{i,\lambda^{-1}}^{(2)}$ (כלומר כפל של אותה השורה בהופכי של הסקלר)

3. **הוספת λ פעמים השורה** j לשורה i תסומן באמצעות המטריצה $E_{i,j,\lambda}^{(3)}$. כאשר λ נמצא בשורה ה- i בעמודה ה- j .

$$E_{i,j,\lambda}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \lambda \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- המטריצה ההפוכה לה הינה $E_{i,j,-\lambda}^{(3)}$ (כלומר הוספת $-\lambda$ פעמים השורה j לשורה i).

כתבו את $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות. השתמשו בדירוג מן התרגיל הקודם והקפידו על סדר המכפלה.

פתרון

שלוש פעולות הדירוג הן החלפת R_1, R_2 , חיסור R_2 מ- R_3 , וחיסור $3R_3$ מ- R_1 . המטריצות המייצגות אותן הן

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

הכפל הוא משמאל, ולכן $E_3 E_2 E_1 A = I_3$. נכפיל בהופכיות בסדר ההפוך:

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

אכן, מכפלת שני הגורמים האחרונים היא $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, והגורם הראשון מחליף את שתי השורות הראשונות ומחזיר את A . כל אחד משלושת הגורמים מבצע פעולה אלמנטרית אחת.

יהיו $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצות הפיכות, ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$ כך ש $\alpha \neq 0$. נגדיר

$$D := \alpha A^2 B^T C^3 A.$$

1. הוכיחו כי D הפיכה.

2. מצאו ביטוי מפורש עבור D^{-1} במונחים של A, B, C, α .

פתרון

1. כל אחד מהגורמים הבאים הפיך:

$$\alpha I_n, \quad A, \quad A^2, \quad B^T, \quad C^3$$

כי:

- $\alpha \neq 0$ ולכן αI_n הפיכה.
- A הפיכה לפי הנתון, ולכן גם A^2 הפיכה.
- אם B הפיכה, אז גם B^T הפיכה, עם $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$.
- אם C הפיכה, אז גם C^3 הפיכה, כי $(C^3)^{-1} = (C^{-1})^3$.

מכפלה של מטריצות הפיכות היא מטריצה הפיכה, לכן D הפיכה.

2. נכתוב את D כסדר מכפלה:

$$D = \alpha A^2 B^T C^3 A.$$

ההופכי של מכפלה הוא מכפלת ההופכיים בסדר הפוך:

$$(XYZ)^{-1} = Z^{-1}Y^{-1}X^{-1}.$$

לכן:

$$D^{-1} = A^{-1}(C^3)^{-1}(B^T)^{-1}(A^2)^{-1}(\alpha I_n)^{-1}.$$

כעת נחשב כל אחד:

$$(C^3)^{-1} = (C^{-1})^3, \quad (B^T)^{-1} = (B^{-1})^T, \quad (A^2)^{-1} = (A^{-1})^2, \quad (\alpha I_n)^{-1} = \frac{1}{\alpha} I_n.$$

נציב:

$$D^{-1} = A^{-1}(C^{-1})^3(B^{-1})^T(A^{-1})^2 \cdot \frac{1}{\alpha} I_n = \frac{1}{\alpha} A^{-1}(C^{-1})^3(B^{-1})^T(A^{-1})^2.$$

זהו הביטוי הפרמטרי המבוקש עבור D^{-1} .

תהא

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

הוכיחו ש- A הפיכה אם ורק אם לכל i מתקיים $\lambda_i \neq 0$, ומצאו נוסחה מפורשת עבור A^{-1} .

פתרון

אם A הפיכה אז כל $\lambda_i \neq 0$.

נניח ש- A הפיכה. נניח בשלילה שקיים אינדקס k כך ש

$$\lambda_k = 0.$$

נבחן את הווקטור הסטנדרטי

$$\vec{e}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

שבו יש 1 במקום ה- k ו-0 בכל שאר הקואורדינטות.
נחשב:

$$A\vec{e}_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0},$$

משום ש- $\lambda_k = 0$.

קיבלנו ש- $A\vec{e}_k = \vec{0}$ עם $\vec{e}_k \neq \vec{0}$. זהו פתרון לא טריוויאלי למערכת $Ax = 0$. אילו A הייתה הפיכה, כפל משמאל ב- A^{-1} היה נותן $A^{-1}0 = 0$, $e_k = A^{-1}0 = 0$, בסתירה ל- $e_k \neq 0$.
לכן בהכרח לכל i מתקיים $\lambda_i \neq 0$.

אם כל $\lambda_i \neq 0$ אז A הפיכה ונמצא את A^{-1} .
 נניח שעבור כל i מתקיים $\lambda_i \neq 0$.
 נגדיר את המטריצה

$$B := \text{diag} \left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

נחשב את המכפלה AB :

$$\begin{aligned} AB &= \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{diag} \left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \right) \\ &= \text{diag} \left(\lambda_1 \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \lambda_n \frac{1}{\lambda_n} \right) \\ &= \text{diag}(1, \dots, 1) = I_n. \end{aligned}$$

באופן סימטרי נקבל גם:

$$BA = I_n.$$

מכאן B היא המטריצה ההפכית של A , כלומר

$$A^{-1} = B = \text{diag} \left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \right).$$

6.4.1 תנאים שקולים

טענה 6.16.

עבור $A \in M_n(\mathbb{F})$ ריבועית, הבאים שקולים:

1. A הפיכה.
2. A שקולת שורה למטריצת היחידה I_n .
3. $\text{rank}(A) = n$.
4. לכל וקטור עמודה $\vec{b} \in \mathbb{F}^n$ למערכת $[A\vec{x} = \vec{b}]$ יש פתרון.
5. לכל וקטור עמודה $\vec{b} \in \mathbb{F}^n$ למערכת $[A\vec{x} = \vec{b}]$ קיים פתרון $\vec{x} \in \mathbb{F}^n$ יחיד.

6.4.2 הקשר למערכת ההומוגנית

עם הטענות מתת סעיף הקודם, נוכל לבחור $\vec{b} = \vec{0}$ ולכן קיים פתרון יחיד- הפתרון הטריווואלי ולכן:

טענה 6.17.

תנאי שקול נוסף: $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה $\Leftrightarrow$ למערכת ההומוגנית קיים הפתרון הטריווואלי בלבד. כלומר, עבור המערכת $[A\vec{x} = \vec{0}]$ הפתרון היחיד שמקיים הוא $\vec{x} = \vec{0}$.

עבור $\alpha, \gamma, \phi \in \mathbb{R}$ נתונה המערכת $Ax = b$, כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = (\alpha, 4\gamma, 5\phi)^T.$$

1. בטאו את הפתרון באמצעות הפרמטרים.
2. הוכיחו שהמערכת הומוגנית אם ורק אם הפתרון היחיד שלה הוא אפס.

פתרון

בעזרת ההופכית מן התרגיל הקודם,

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 4\gamma \\ 5\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha + 4\gamma - 15\phi \\ \alpha \\ 5\phi - \alpha \end{pmatrix}.$$

הרכיבים מתקבלים מסכומי המכפלות $3\alpha + 1 \cdot 4\gamma - 3 \cdot 5\phi$, α ו- $5\phi - \alpha$. בדיקה ישירה במשוואות נותנת $x_2 = \alpha$, $x_1 + 3x_3 = 4\gamma$ ו- $x_2 + x_3 = 5\phi$. מכיוון ש- A הפיכה, זהו הפתרון היחיד. המערכת הומוגנית בדיוק כאשר $b = 0$, כלומר $\alpha = \gamma = \phi = 0$; אז הנוסחה נותנת $x = 0$. בכיוון ההפוך, אם $x = 0$ הוא פתרון, אז $b = A0 = 0$ ולכן המערכת הומוגנית. ההפיכות מבטיחה את היחידות גם במקרה זה.

שלושה ערוצים מצומדים לפי $A = I_3 + N$, כאשר

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

חשבו N^2, N^3 , מצאו את A^{-1} ללא דירוג ושחזרו את המצב מתוך $y = Ax = (7, 4, 2)^T$.

פתרון

במכפלה N^2 הכניסה היחידה שאינה מתאפסת היא $2 \cdot 1 = 2$ $(N^2)_{13} = N_{12}N_{23}$. מכאן

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 0.$$

נחשב בשני סדרי הכפל:

$$(I + N)(I - N + N^2) = I - N + N^2 + N - N^2 + N^3 = I,$$

$$(I - N + N^2)(I + N) = I + N - N - N^2 + N^2 + N^3 = I.$$

לכן

$$A^{-1} = I - N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

עתה

$$x = \begin{pmatrix} 7 - 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \\ 4 - 2 \\ 2 \end{pmatrix} = (3, 2, 2)^T.$$

בדיקה: $Ax = (3 + 2 \cdot 2, 2 + 2, 2)^T = (7, 4, 2)^T$. שלוש הפעולות של הצימוד נותנות אפס, ולכן טור ההופכית נעצר.

תרגול 7: דרגה, מרחבי שורות ועמודות ומערכות מדידה

עיקרון מנחה

מטרות התרגול. נבדיל בין מרחב השורות, מרחב העמודות והמרחב המאפס, ונשתמש במשפט דרגה ואפסות כדי לדעת כמה מידע וכמה חופש מכילה מערכת. דוגמאות המדידה מתאימות למערכות הנדסיות ממגוון תחומים.

7.1 מרחבי השורות והעמודות של מטריצה ומשפט הדרגה

תזכורת (מההרצאה)

מרחב השורות $\mathcal{R}(A)$ של $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ הוא תת המרחב של $\mathbb{F}^m$ הנפרש ע"י שורותיה.

- מרחב השורות של מטריצה נשמר תחת פעולות שורה אלמנטריות

טענה 7.1.

- **טענה 1** אם המטריצות $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ שקולות שורות, אז $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$.
- **טענה 2:** אם A מטריצה מדורגת, אז שורותיה שאינן שורות 0 מהוות בסיס ל- $\mathcal{R}(A)$, (כאמור, קבוצה בת"ל ב- $\mathbb{F}^m$)

תזכורת (מההרצאה)

- מרחב העמודות** $\mathcal{C}(A)$ של $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ הוא תת המרחב של $\mathbb{F}^m$ הנפרש ע"י עמודותיה.
- מרחב העמודות **לא** נשמר במהלך דירוג - **רק הממד** שלו נשמר
 - מתקיים $\mathcal{C}(A) = \mathcal{R}(A^T)$ כאשר מזהים וקטור שורה עם וקטור העמודה המשוחלף שלו

טענה 7.2.

משפט הדרגה: לכל מטריצה A מתקיים $\dim(\mathcal{C}(A)) = \dim(\mathcal{R}(A))$. נקרא **הדרגה של המטריצה**.

תזכורת (מההרצאה)

- מרחבי השורות והעמודות אינם בהכרח אותו תת מרחב. עבור מטריצה מלבנית הם אף שייכים למרחבים שונים, $\mathbb{R}^m$ -ו- $\mathbb{R}^n$, בהתאמה; עם זאת ממדיהם תמיד שווים.
- ראינו כבר הגדרה לדרגה: $\text{rank } A = \text{מספר האיברים הפותחים בצורה מדורגת קנונית}$
- עבור $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, מתקיים $\text{rank}(A) \leq \min(m, n)$
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (ריבועית) הפיכה אם $\text{rank}(A) = n$
- $\text{rank}(A \cdot B) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$
- $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

מצאו בסיס וממד למרחב השורות ולמרחב העמודות של

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

הסבירו מאיזו מטריצה לוקחים את וקטורי כל בסיס.

פתרון

נחליף את השורות ונחסר מן השנייה פי שלושה מהראשונה:

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

פעולות שורה שומרות את מרחב השורות, ולכן בסיס לו הוא $\{(1, -2, 3)\}$. למרחב העמודות בוחרים את העמודה המקורית במיקום המוביל, כלומר $\{(3, 1)^T\}$. אכן, העמודות השנייה והשלישית הן -2 ו- 3 פעמים הראשונה. לשני המרחבים ממד 1, אך הם תתי מרחבים של מרחבים שונים: השורות ב- $\mathbb{R}^3$ והעמודות ב- $\mathbb{R}^2$.

תהינה $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ כך ש- $AB = I_m$. מצאו את הדרגות של A, B . מה ניתן להסיק על גודלם של m, n ?

פתרון

נשתמש בטענות לעיל, ונקבל: $\text{rank}(AB) = \text{rank}(I_m) = m \leq \text{rank}(A) \leq m$ ובסה"כ נקבל כי $\text{rank}(A) = m$. עבור B באותו אופן בדיוק. מאחר ו- $\text{rank}(A) = m \leq \min(m, n)$, נסיק כי $m \leq n$. הערה: מאחר ולא נתון שהן ריבועיות, אי אפשר להסיק כי B ההופכית של A !

7.1.1 צמצום והשלמה של קבוצות לבסיס במרחב $\mathbb{R}^n$

כל קבוצה פורשת ניתן לצמצם לבסיס, כל קבוצה בת"ל ניתן להשלים לבסיס

צמצום קבוצה פורשת לבסיס

עיקרון מנחה

1. **דרך א:** נרצה שהתשובה תהיה מורכבת מהווקטורים המקוריים (צמצום שלהם). (ראינו דרך זו בתרגיל הקודם).

- נגדיר מטריצה **שעמודותיה** הן איברי S ונדרג אותה.
- לכל העמודות שיש להן פותח - ניקח כבסיס את העמודות **המקוריות** המתאימות. (בת"ל)
- הסבר: מרחב העמודות **לא** נשמר - ולכן ניקח את העמודות המקוריות

2. **דרך ב:** נמצא קבוצה **חדשה** בת"ל שפורשת את אותו מרחב.

- נגדיר מטריצה **ששורותיה** הן איברי S ונדרג אותה.
- ניקח כבסיס רק את השורות מהדירוג שאינן שורות 0. (בת"ל)
- הסבר: מרחב שורות **כן** נשמר - אפשר לקחת אחרי הדירוג.

השלמת קבוצה בת"ל לבסיס

עיקרון מנחה

- נגדיר מטריצה **ששורותיה** הן איברי S ונדרג אותה.
- לכל עמודה שאין לה פותח אחרי הדירוג, נוסיף ל- S את וקטור הבסיס הסטנדרטי e_j , כאשר j הוא מספר העמודה. כדי להצדיק זאת, נחליף את השורות המקוריות בשורות המדורגות, פעולה שאינה משנה את המרחב שהן פורשות. בעמודות המובילות וקטורי הבסיס שנוספו הם אפס, ואילו השורות המדורגות נותנות מטריצה משולשית בעלת אלכסון לא אפסי. לכן בכל צירוף מאפס מתאפסים תחילה מקדמי השורות המדורגות, ואחר כך מקדמי וקטורי הבסיס שנוספו. מאחר שגם הקבוצה המקורית בלתי תלויה, ההחלפה חזרה לשורות המקוריות משמרת את תכונת הבסיס.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^5 \quad \text{תהי}$$

1. הראו ש- S בת"ל

2. השלימו את S לבסיס של $\mathbb{R}^5$.

פתרון

1. ניקח מטריצה ששורותיה הן הווקטורים הללו, ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{פעולות שורה}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

קיבלנו צורה מדורגת ללא שורת אפסים, לכן S בת"ל.

2. חסרים לנו 2 איברים עבור בסיס של $\mathbb{R}^5$. ניקח מטריצה **ששורותיה** הן הווקטורים הללו, ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{פעולות שורה}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

לאחר הדירוג קיבלנו שהעמודות ללא פותח הן 2,4. לכן נוסיף ל- S **המקורית** את איברי הבסיס הסטנדרטי העמודות אלו: e_2, e_4

$$B = S \cup \{e_2, e_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

1. מצאו בסיס B למרחב $V = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (מעל $\mathbb{R}$). מהו הממד שלו?

2. השלימו את B שמצאתם לבסיס D של $\mathbb{R}^4$.

פתרון

1. נגדיר מטריצה ששורותיה הן הווקטורים הנ"ל, ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{פעולות שורה}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מאחר ורשמנו את הווקטורים כשורות, פעולות הדירוג לא שינו את המרחב הנפרש, ולכן נוכל לקחת את **השורות** שאינן שורות 0 מהמטריצה **אחרי הדירוג** (הן בת"ל).

לכן הבסיס המבוקש הוא: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$. יש בו 2 איברים ולכן הממד הוא 2.

2. משיקולי ממד נסיק כי נדרשים עוד 2 וקטורים על מנת לקבל בסיס של $\mathbb{R}^4$.

נרשום את איברי B כשורות. המטריצה כבר מדורגת, והעמודות המובילות הן 1,2. אז עלינו להשלים וקטורי בסיס סטנדרטי שיתאימו לעמודות 3,4 שאין להן פותח, כלומר e_3, e_4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

למטריצה המורחבת ארבע שורות בלתי תלויות, ולכן הבסיס המבוקש הוא

$$D = B \cup \{e_3, e_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

תרגיל ממבחן

נעבוד מעל השדה $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$, וכל החישובים הם מודולו 3. לכל $\omega \in \mathbb{Z}_3$ נגדיר

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & \omega & 1 \\ \omega & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \omega \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. קבעו עבור אילו ערכי ω מתקיים $b \in \text{Col}(A(\omega))$, ובמקרים אלה מצאו את כל הפתרונות של $A(\omega)x = b$.

2. קבעו עבור אילו ערכי ω מתקיימים בו־זמנית $b \in \text{Col}(A(\omega))$ וגם $c \in \text{Col}(A(\omega))$.

פתרון

וקטור שיין למרחב העמודות של מטריצה אם ורק אם המערכת המתאימה פתירה. כאן יש רק שלושה ערכים אפשריים לפרמטר, ונבדוק את כולם.

1. עבור $\omega = 0$ מתקבלת המערכת

$$x_1 + x_3 = 1, \quad x_2 + x_3 = 2, \quad x_1 + x_2 = 0.$$

משתי המשוואות הראשונות, $x_1 = 1 - x_3$ ו- $x_2 = 2 - x_3$. הצבה בשלישית נותנת

$$(1 - x_3) + (2 - x_3) = 0 \iff -2x_3 = 0 \iff x_3 = 0,$$

משום שבשדה $\mathbb{Z}_3$ מתקיימים $3 = 0$ ו- $1 = -2$. לכן הפתרון היחיד הוא

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

עבור $\omega = 1$ כל שורות המטריצה שוות, ולכן כל וקטור במרחב העמודות הוא מהצורה $(a, a, a)^T$. הווקטור $b = (1, 2, 0)^T$ אינו מהצורה הזאת, ולכן אין פתרון.

עבור $\omega = 2$ נדרג את המטריצה המורחבת, כאשר כל הפעולות מודולו 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

השורה השנייה נותנת $2x_3 = 0$, ולכן $x_3 = 0$. השורה השלישית נותנת $2x_2 = 1$, ולכן $x_2 = 1$ לבסוף $x_1 + 2 = 1$, ומכאן $x_1 = 2$. לכן הפתרון היחיד הוא

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

לפיכך $b \in \text{Col}(A(\omega))$ בדיוק עבור $\omega \in \{0, 2\}$.

2. פיתוח הדטרמיננטה בשורה הראשונה נותן

$$\begin{aligned}\det A(\omega) &= (\omega - 1) - \omega(\omega^2 - 1) + (\omega - 1) \\ &= -\omega^3 + 3\omega - 2.\end{aligned}$$

מכאן $\det A(0) = 1$ ו- $\det A(2) = 2$ בשדה $\mathbb{Z}_3$. בשני המקרים המטריצה הפיכה, ולכן מרחב העמודות שלה הוא כל $\mathbb{Z}_3^3$. בפרט גם b וגם c שייכים אליו. לבדיקה ישירה,

$$A(0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c, \quad A(2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c.$$

עבור $\omega = 1$ כבר ראינו ש- b אינו שייך למרחב העמודות. התשובה היא אפוא בדיוק $\omega \in \{0, 2\}$.

7.2 המרחב המאפס והאפסות של מטריצה

הגדרה פורמלית

יהי $\mathbb{F}$ שדה, ונסמן $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$.
המרחב המאפס של A (נקרא גם גרעין של A) הוא אוסף כל הווקטורים בעמודה

$$N(A) := \{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = 0\},$$

כלומר כל הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$.

- $N(A)$ הוא תת מרחב וקטורי של $\mathbb{F}^n$.
- הממד של $N(A)$ נקרא **האפסות של A** ומסומן

$$\dim N(A) = \text{null}(A).$$

טענה 7.8

יהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$. אז מתקיים

$$\text{rank}(A) + \text{null}(A) = n.$$

- למטריצה A יש בדיוק n עמודות, כלומר היא מייצגת n וקטורי עמודה ב- $\mathbb{F}^m$.
- נעביר את A לצורה מדורגת קנונית (צורה מדורגת מצומצמת לפי שורות).
- מספר העמודות שבהן מופיע איבר מוביל הוא בדיוק $\text{rank}(A)$. עמודות אלו מתלכדות (בעמודות המקוריות) לבסיס של מרחב העמודות של A .
- מספר העמודות שאין בהן איבר מוביל הוא $n - \text{rank}(A)$. עמודות אלה מתאימות למשתנים החופשיים במערכת $Ax = 0$, וכל משתנה חופשי מוסיף ממד אחד למרחב המאפס. לכן

$$\dim N(A) = \text{null}(A) = n - \text{rank}(A).$$

- נסכם:

$$\text{rank}(A) + \text{null}(A) = \text{rank}(A) + (n - \text{rank}(A)) = n.$$

מצאו בסיס לגרעין ואת ממדו עבור

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

הציגו את כל פתרונות $Ax = 0$ ובדקו את משפט הדרגה והממד.

פתרון

המערכת היא $x_1 + 2x_2 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$. נסמן $x_3 = t$; אז

$$x_2 = -t, \quad x_1 = 2t,$$

ולכן

$$\ker A = \{t(2, -1, 1)^T : t \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(2, -1, 1)^T\}.$$

הווקטור הפורש שונה מאפס, ולכן הוא בסיס והאפסיות היא 1. יש שתי עמודות מובילות במטריצה, ולכן הדרגה 2. אכן $\text{rank } A + \dim \ker A = 2 + 1 = 3$, כמספר העמודות.

עיקרון מנחה

שאלות שונות דורשות מרחבים שונים. כדי לתאר אילו אגפי ימין אפשר לקבל, מחשבים את מרחב העמודות. כדי לתאר אילו שינויים בקלט אינם משנים את הפלט, מחשבים את המרחב המאפס. דרגה ואפסות סופרות את שני סוגי החופש הללו.

7.3 המשמעות מאחורי כפל מטריצה בוקטור עמודה

הגדרה פורמלית

יהי $\mathbb{F}$ שדה, ויהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ מטריצה. נכתוב את עמודותיה בתור

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix}, \quad a_j \in \mathbb{F}^m.$$

$$\text{יהא } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n.$$

1. **פרשנות כצירוף ליניארי של עמודות.** כפל המטריצה בוקטור מוגדר על ידי

$$Av = v_1 a_1 + \dots + v_n a_n.$$

כלומר Av הוא הצירוף הליניארי של עמודות A במשקלים $v_1, \dots, v_n$. מכאן נובע בכללות

$$\{Av \mid v \in \mathbb{F}^n\} = \text{span}\{a_1, \dots, a_n\} = \text{Col}(A).$$

2. **פרשנות כפעולה ליניארית.** הפונקציה

$$T_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m, \quad T_A(v) = Av,$$

היא העתקה ליניארית. אכן לכל $u, v \in \mathbb{F}^n$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{F}$:

$$T_A(u + v) = A(u + v) = Au + Av,$$

$$T_A(\lambda v) = A(\lambda v) = \lambda(Av).$$

לכן A פועל על הווקטור v בדיוק כמו העתקה לינארית, והעמודות של A מבטאות את השפעת ההעתקה על וקטורי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$:

$$T_A(e_j) = a_j.$$

יהי $\mathbb{F}$ שדה, ונסמן $B \in \mathbb{F}^{n \times m}$. נגדיר

$$J := \{Bv \mid v \in \mathbb{F}^m\} \subseteq \mathbb{F}^n.$$

הראו כי מתקיים

$$J = \text{Col}(B).$$

פתרון

נסמן את עמודות המטריצה B ב

$$B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \dots & b_m \\ | & & | \end{pmatrix},$$

כלומר $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{F}^n$ הם וקטורי העמודה של B .
כעת יהא

$$v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^m.$$

אז לפי הגדרת כפל מטריצה בווקטור מתקיים

$$Bv = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m.$$

נוכיח שתי הכלות.

1. נוכיח כי $J \subseteq \text{Col}(B)$.

יהא $y \in J$. אז קיים $v \in \mathbb{F}^m$ כך ש $y = Bv$.

כעת ראינו שכל וקטור מהצורה Bv ניתן לכתיבה כצירוף לינארי של $b_1, \dots, b_m$, כלומר

$$y = Bv = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m$$

עבור סקלרים מתאימים $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{F}$.

לכן y שייך למרחב הנפרש על ידי $b_1, \dots, b_m$, כלומר

$$y \in \text{span}\{b_1, \dots, b_m\} = \text{Col}(B).$$

קיבלנו $J \subseteq \text{Col}(B)$.

2. נוכיח את ההכלה ההפוכה $\text{Col}(B) \subseteq J$.

יהא $w \in \text{Col}(B)$. לפי ההגדרה של מרחב העמודות יש סקלרים $\eta_1, \dots, \eta_m \in \mathbb{F}$ כך ש

$$w = \eta_1 b_1 + \dots + \eta_m b_m.$$

נגדיר

$$v := \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^m.$$

אז לפי חישוב קודם נקבל

$$Bv = \eta_1 b_1 + \cdots + \eta_m b_m = w.$$

מכאן ש w ניתן לכתיבה כ Bv עבור איזה שהוא $v \in \mathbb{F}^m$, ולכן

$$w \in J.$$

קיבלנו $J \subseteq \text{Col}(B)$.

משתי ההכלות יחד נובע

$$J = \text{Col}(B),$$

כנדרש.

יהי $\mathbb{F}$ שדה, ונסמן $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך שמתקיים

$$AB = 0.$$

הראו כי

$$\text{Col}(B) \subseteq N(A),$$

כלומר כל וקטור בעמודות של B (וכל צירוף לינארי שלהם) מתאפס לאחר כפל במטריצה A .**פתרון**

נשתמש בהגדרות של מרחב העמודות ושל המרחב המאפס.

נרצה להראות שלכל וקטור $v \in \text{Col}(B)$ מתקיים $Av = 0$.לפי ההגדרה של מרחב העמודות, אם $v \in \text{Col}(B)$ אז קיים וקטור $w \in \mathbb{F}^n$ כך ש

$$v = Bw.$$

נחשב את Av :

$$Av = A(Bw) = (AB)w.$$

מתוך הנתון $AB = 0$ נקבל

$$(AB)w = 0w = 0,$$

ולכן

$$Av = 0.$$

קיבלנו שלכל $v \in \text{Col}(B)$ מתקיים $Av = 0$, כלומר

$$v \in N(A).$$

מכאן נובע

$$\text{Col}(B) \subseteq N(A),$$

כנדרש.

7.4 תרגילים

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $S, R \subseteq V$ שתי קבוצות (לאו דווקא סופיות). נסמן

$$\text{span}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i s_i \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \alpha_i \in \mathbb{F}, s_i \in S \right\},$$

הסכום הריק מוגדר להיות וקטור האפס, ולכן גם $\text{span}(\emptyset) = \{0\}$. נגדיר באופן דומה את $\text{span}(R)$ ואת $\text{span}(S \cup R)$. הראו כי לכל $S, R \subseteq V$ מתקיים

$$\text{span}(S) + \text{span}(R) = \text{span}(S \cup R).$$

פתרון

נסמן

$$U := \text{span}(S), \quad W := \text{span}(R).$$

נזכור שהסכום $U + W$ מוגדר על ידי

$$U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

נוכיח את השוויון

$$\text{span}(S) + \text{span}(R) = \text{span}(S \cup R)$$

על ידי שתי הכלות:

$$\text{span}(S) + \text{span}(R) \subseteq \text{span}(S \cup R) \quad \text{ו} \quad \text{span}(S \cup R) \subseteq \text{span}(S) + \text{span}(R).$$

1. תחילה נוכיח

$$\text{span}(S) + \text{span}(R) \subseteq \text{span}(S \cup R).$$

יהא $v \in \text{span}(S) + \text{span}(R)$. אז קיים $u \in \text{span}(S)$ וקיים $w \in \text{span}(R)$ כך ש

$$v = u + w.$$

מהגדרת $\text{span}(S)$ קיימים וקטורים $s_1, \dots, s_k \in S$ וסקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ כך ש

$$u = \sum_{i=1}^k \alpha_i s_i.$$

באופן דומה, קיימים וקטורים $r_1, \dots, r_\ell \in R$ וסקלרים $\beta_1, \dots, \beta_\ell \in \mathbb{F}$ כך ש

$$w = \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j r_j.$$

לכן

$$v = u + w = \sum_{i=1}^k \alpha_i s_i + \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j r_j.$$

כל אחד מהווקטורים s_i שייך ל- S ולכן גם ל- $S \cup R$, וכל אחד מהווקטורים r_j שייך ל- R ולכן גם ל- $S \cup R$. לכן v הוא צירוף לינארי סופי של וקטורים מתוך $S \cup R$.

לפי ההגדרה של $\text{span}(S \cup R)$ נקבל

$$v \in \text{span}(S \cup R).$$

מכאן

$$\text{span}(S) + \text{span}(R) \subseteq \text{span}(S \cup R).$$

2. כעת נוכיח את ההכלה ההפוכה

$$\text{span}(S \cup R) \subseteq \text{span}(S) + \text{span}(R).$$

יהא $v \in \text{span}(S \cup R)$. לפי ההגדרה קיימים $x_1, \dots, x_t \in S \cup R$ וסקלרים $\gamma_1, \dots, \gamma_t \in \mathbb{F}$ כך ש

$$v = \sum_{i=1}^t \gamma_i x_i.$$

נחלק את האיברים x_i לשתי קבוצות: אלה שבאים מ- S ואלה שבאים מ- R .

נגדיר:

$$I_S := \{i \mid x_i \in S\}, \quad I_R := \{i \mid x_i \in R\}.$$

אז אפשר לכתוב את v בצורה

$$v = \sum_{i \in I_S} \gamma_i x_i + \sum_{i \in I_R} \gamma_i x_i.$$

נגדיר

$$u := \sum_{i \in I_S} \gamma_i x_i, \quad w := \sum_{i \in I_R} \gamma_i x_i.$$

נשים לב:

• כל x_i עבור $i \in I_S$ שייך ל- S , ולכן u הוא צירוף לינארי של איברי S , כלומר

$$u \in \text{span}(S).$$

• כל x_i עבור $i \in I_R$ שייך ל- R , ולכן w הוא צירוף לינארי של איברי R , כלומר

$$w \in \text{span}(R).$$

כעת ראינו ש

$$v = u + w$$

עם $u \in \text{span}(S)$ ו- $w \in \text{span}(R)$, ולכן

$$v \in \text{span}(S) + \text{span}(R).$$

קיבלנו

$$\text{span}(S \cup R) \subseteq \text{span}(S) + \text{span}(R).$$

משתי ההכלות יחד מתקבל

$$\text{span}(S) + \text{span}(R) = \text{span}(S \cup R),$$

כפי שרצינו להוכיח.

נסמן ב- $\mathbb{R}_3[x]$ את מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה לכל היותר 3. נגדיר את תת המרחבים הבאים של $\mathbb{R}_3[x]$:

$$U = \text{span}\{1, x, 1+x\},$$

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = 0, p(1) = 0\}.$$

מצאו בסיסים וממדים עבור $U + W$ ועבור $U \cap W$.

פתרון

נעבוד בתוך $\mathbb{R}_3[x]$.

1. ראשית נבין את U .

יש לנו

$$U = \text{span}\{1, x, 1+x\}.$$

נשים לב שיש קשר לינארי:

$$(1+x) - 1 - x = 0,$$

ולכן הפולינום $1+x$ הוא צירוף לינארי של 1 ו- x , כלומר הקבוצה $\{1, x, 1+x\}$ תלויה לינארית.

מצד שני, הקבוצה $\{1, x\}$ בלתי תלויה לינארית: אם

$$a \cdot 1 + b \cdot x = 0$$

כפולינום, אז מקדמי החזקות נותנים

$$a = 0, \quad b = 0.$$

לכן $\{1, x\}$ מהווה בסיס של U , ובהכרח

$$\dim U = 2.$$

2. כעת ננתח את W .

לפי ההגדרה:

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = 0, p(1) = 0\}.$$

נסמן פולינום כללי ב- $\mathbb{R}_3[x]$:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

מהתנאי $p(0) = 0$ נקבל

$$p(0) = a_0 = 0,$$

ולכן

$$p(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

מהתנאי $p(1) = 0$ נקבל

$$p(1) = a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

נפתור את המשוואה בעזרת פרמטרים. נסמן

$$a_2 = s, \quad a_3 = t,$$

ואז

$$a_1 = -s - t.$$

לכן כל פולינום ב- W ניתן לכתיבה כך:

$$p(x) = (-s - t)x + sx^2 + tx^3.$$

נפרק לצירוף לינארי:

$$p(x) = s(x^2 - x) + t(x^3 - x).$$

מכאן

$$W = \text{span}\{x^2 - x, x^3 - x\}.$$

נבדוק שהתיאור הזה הוא בסיס. נניח

$$\alpha(x^2 - x) + \beta(x^3 - x) = 0$$

כפולינום. נסדר:

$$\beta x^3 + \alpha x^2 + (-\alpha - \beta)x = 0.$$

הפולינום האפס מתקבל אם ורק אם כל המקדמים מתאפסים:

$$\beta = 0, \quad \alpha = 0, \quad -\alpha - \beta = 0.$$

מכאן $\alpha = \beta = 0$, כלומר הפולינומים $x^3 - x$ ו- $x^2 - x$ בלתי תלויים לינארית.

לכן

$$\{x^2 - x, x^3 - x\}$$

בסיס של W , ומתקבל

$$\dim W = 2.$$

3. עתה נמצא בסיס וממד עבור $U + W$.

מן החישובים:

$$U = \text{span}\{1, x\}, \quad W = \text{span}\{x^2 - x, x^3 - x\},$$

ולכן

$$U + W = \text{span}\{1, x, x^2 - x, x^3 - x\}.$$

נסמן

$$S = \{1, x, x^2 - x, x^3 - x\}.$$

נבדוק אם S בלתי תלויה לינארית. נניח

$$c_1 \cdot 1 + c_2 x + c_3(x^2 - x) + c_4(x^3 - x) = 0$$

כפולינום. נסדר:

$$c_1 + (c_2 - c_3 - c_4)x + c_3 x^2 + c_4 x^3 = 0.$$

מכיוון שזהו הפולינום האפס, נדרוש שכל המקדמים יתאפסו:

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_2 - c_3 - c_4 = 0, \\ c_3 = 0, \\ c_4 = 0. \end{cases}$$

מן השלישית והרביעית $c_3 = c_4 = 0$, ואז מהשנייה $c_2 = 0$, ומהראשונה $c_1 = 0$. כלומר הפתרון היחיד הוא הטריבויאלי, והקבוצה S בלתי תלויה לינארית.

הקבוצה S מכילה 4 פולינומים, ובנוסף ידוע ש- $\mathbb{R}_3[x]$ הוא מרחב מממד 4. לכן S מהווה בסיס של $\mathbb{R}_3[x]$, ומתקבל

$$U + W = \mathbb{R}_3[x], \quad \dim(U + W) = 4.$$

4. כעת נמצא בסיס וממד עבור $U \cap W$.

לפי משפט הממד לסכום:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

מציבים:

$$4 = 2 + 2 - \dim(U \cap W),$$

לכן

$$\dim(U \cap W) = 0.$$

נבדוק זאת ישירות. פולינום ב- U הוא מהצורה

$$p(x) = a + bx,$$

כי $U = \text{span}\{1, x\}$.

כדי ש- p יהיה גם ב- W עליו לקיים

$$p(0) = 0, \quad p(1) = 0.$$

מן $p(0) = 0$ נקבל

$$a = 0.$$

מן $p(1) = 0$ נקבל

$$a + b = 0.$$

הצבה של $a = 0$ במשוואה השנייה נותנת $b = 0$. לכן הפולינום היחיד בחיתוך הוא

$$p(x) \equiv 0.$$

מכאן

$$U \cap W = \{0\}, \quad \dim(U \cap W) = 0.$$

בסיס לחיתוך הוא באופן רשמי הקבוצה הריקה (אין וקטור לא אפסי בחיתוך).

לסיכום:

$$\dim(U + W) = 4, \quad U + W = \mathbb{R}_3[x],$$

$$\dim(U \cap W) = 0, \quad U \cap W = \{0\}.$$

במערכת הנדסית מבקשים לשחזר שלושה משתני מצב ממשיים x_1, x_2, x_3 מתוך ארבע קריאות חיישנים. משתנים אלו עשויים לייצג סטיות של טמפרטורה, עומס או אות חשמלי ביחידות מנורמלות. נניח מודל לינארי מדויק ללא רעש, שבו

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

1. מצאו בסיס למרחב השורות של M ובסיס למרחב העמודות של M , ואת הממדים שלהם.

2. כמה קריאות חיישנים תלויות לינארית באחרות? הסבירו באיזה מובן הן אינן מוסיפות מידע במודל המדויק.

3. האם אפשר לקבוע באופן חד-משמעי את שלושת משתני המצב x_1, x_2, x_3 מתוך הקריאות?

4. נניח שקיבלנו קריאות

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

בדקו תחילה האם המערכת $M\mathbf{x} = \mathbf{y}$ עקבית. לאחר מכן החליפו רק את הקריאה הרביעית ב-7, ומצאו את כל וקטורי המצב המתאימים לקריאות המתוקנות.

פתרון

1. נדרג את M לפי שורות:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

לכן הדרגה היא

$$\text{rank } M = 2.$$

שתי השורות הראשונות המקוריות בלתי תלויות לינארית, והשורה השלישית והרביעית ניתנות לביטוי כצירוף לינארי שלהן:

$$(1, 1, 2) = (1, 0, 1) + (0, 1, 1),$$

$$(2, 1, 3) = (1, 0, 1) + (1, 1, 2) = 2(1, 0, 1) + (0, 1, 1).$$

לכן בסיס למרחב השורות:

$$\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}, \quad \dim(\text{Row}(M)) = 2.$$

עבור מרחב העמודות, העמודות הן

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

נשים לב ש

$$\mathbf{c}_3 = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2.$$

קל לראות ש- $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ בלתי תלויות לינארית, ולכן

$$\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$$

הוא בסיס למרחב העמודות, והממד שלו גם כן 2, בהתאם למשפט שהדרגה לפי שורות שווה לדרגה לפי עמודות.

2. מאחר שראינו שהשורות השלישית והרביעית ניתנות לביטוי כצירופים לינאריים של השורה הראשונה והשנייה, נקבל ששתי השורות האחרונות מיותרות מבחינה לינארית. כלומר, רק שתי שורות חיישנים בלתי תלויות.

3. המטריצה היא 4×3 והדרגה שלה 2. מספר הנעלמים הוא 3, ולכן

$$\dim(\ker M) = 3 - \text{rank } M = 3 - 2 = 1.$$

כלומר תת המרחב של הפתרונות למערכת $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ הוא מממד 1 וכולל וקטורים לא אפסיים. לכן לכל וקטור ימין $\mathbf{y}$ שנמצא במרחב העמודות, אם המערכת $M\mathbf{x} = \mathbf{y}$ פתירה, קבוצת הפתרונות היא ישר (ממד 1), ולא נקודה אחת בלבד. לכן אי אפשר לקבוע את שלושת משתני המצב באופן חד משמעי מתוך הקריאות בלבד.

4. לפני פתרון יש לבדוק עקביות. מהקשרים בין השורות נובע שכל וקטור קריאות אפשרי חייב לקיים

$$y_3 = y_1 + y_2, \quad y_4 = 2y_1 + y_2.$$

עבור הנתונים המקוריים $(2, 3, 5, 8)^T$, התנאי הראשון מתקיים אך השני מחייב $y_4 = 2 \cdot 2 + 3 = 7 \neq 8$. לכן למערכת המקורית אין פתרון.

לאחר החלפת הקריאה הרביעית ב-7 נקבל את המערכת העקבית

$$M\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 2, \\ x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

כעת שתי המשוואות האחרונות הן צירופים של שתי הראשונות, גם באגף ימין. נסמן $t = x_3$ ונקבל

$$x_1 = 2 - t, \quad x_2 = 3 - t, \quad x_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

לכן קבוצת הפתרונות היא הישר האפיני

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

וקטור הכיוון $(-1, -1, 1)^T$ פורש את $N(M)$, כפי שחזזה משפט דרגה ואפסות.

במערכת כיוול מודדים שלושה אותות (m_1, m_2, m_3) , המתקבלים משלושה גדלי מצב (q_1, q_2, q_3) . זהו מודל לינארי מופשט, המתאים לכל מערכת שבה המדידות הן סכומים מצטברים של הגדלים המבוקשים. הקשר ביניהם לינארי ונתון על ידי

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. חשבו בסיס למרחב העמודות של C והראו שהעמודות של C מהוות בסיס ל- $\mathbb{R}^3$.

2. הוכיחו ש- C הפיכה.

3. מצאו מפורשות את המטריצה C^{-1} על ידי פתרון המערכת $C\mathbf{q} = \mathbf{m}$ עבור $\mathbf{q}$ כתלות ב- $\mathbf{m}$.

4. הסבירו איך מבחינה מתמטית העובדה ש- C הפיכה מתורגמת לכך שניתן לשחזר באופן חד משמעי את הגדלים התאורטיים (q_1, q_2, q_3) מתוך המדידות (m_1, m_2, m_3) .

פתרון

1. העמודות של C הן

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

נבדוק תלות לינארית. נניח שקיימים a, b, c כך ש

$$a\mathbf{c}_1 + b\mathbf{c}_2 + c\mathbf{c}_3 = \mathbf{0}.$$

כלומר

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ומקבלים את המערכת

$$\begin{cases} a = 0, \\ a + b = 0, \\ a + b + c = 0. \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה $a = 0$, מהשנייה $b = 0$, ומהשלישית $c = 0$. לכן העמודות בלתי תלויות לינארית.מאחר שיש לנו 3 עמודות בלתי תלויות ב- $\mathbb{R}^3$, הן מהוות בסיס ל- $\mathbb{R}^3$, ולכן

$$\text{Col}(C) = \mathbb{R}^3, \quad \text{rank } C = 3.$$

2. המטריצה C היא 3×3 ולפי הסעיף הקודם

$$\text{rank } C = 3.$$

זוהי דרגה מלאה, ולכן לפי תנאי ההפיכות השקולים C הפיכה. נפרט גם את המשמעות למערכות משוואות: למערכת $C\mathbf{q} = \mathbf{0}$ יש אם כן

$$\dim(\ker C) = 3 - \text{rank } C = 3 - 3 = 0.$$

כלומר הפתרון היחיד של המערכת ההומוגנית הוא $\mathbf{q} = \mathbf{0}$.מצד שני, מאחר שמרחב העמודות של C הוא כל $\mathbb{R}^3$, לכל וקטור $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$ המערכת $C\mathbf{q} = \mathbf{m}$ פתירה.לכן לכל $\mathbf{m}$ קיים פתרון יחיד $\mathbf{q}$. זו בדיוק התכונה שאומרת שמתקיימת העתקה חד-חד ערכית ועל מ- $\mathbb{R}^3$ לעצמו באמצעות כפל ב- C , ולכן קיימת מטריצה C^{-1} כך ש

$$C^{-1}C = CC^{-1} = I_3.$$

כלומר C הפיכה. זהו קשר בין הפיכות המטריצה לבין חד-חד-ערכיות ועל של ההעתקה שהיא מייצגת.3. נחשב ביטוי מפורש ל- C^{-1} . נתחיל מהמערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}.$$

זה נותן את המשוואות

$$\begin{cases} q_1 = m_1, \\ q_1 + q_2 = m_2, \\ q_1 + q_2 + q_3 = m_3. \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה

$$q_1 = m_1.$$

מהמשוואה השנייה

$$m_1 + q_2 = m_2 \implies q_2 = m_2 - m_1.$$

מהמשוואה השלישית

$$m_1 + (m_2 - m_1) + q_3 = m_3 \implies m_2 + q_3 = m_3 \implies q_3 = m_3 - m_2.$$

נסכם:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}.$$

לכן

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. מבחינת המשמעות, העובדה ש- C הפיכה פירושה שהעמודות של C יוצרות בסיס ל- $\mathbb{R}^3$, ולכן כל וקטור מדידה $\mathbf{m}$ נכתב באופן יחיד כצירוף לינארי של עמודות C , כלומר

$$\mathbf{m} = C\mathbf{q}$$

עבור $\mathbf{q}$ יחיד. במודל המדויק, לכל וקטור מדידות (m_1, m_2, m_3) מתאים וקטור מצב יחיד (q_1, q_2, q_3) , וניתן לחשב אותם באופן מפורש בעזרת C^{-1} :

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}.$$

זו דוגמה למטריצת כיוול שבאמצעותה משחזרים את הגדלים התאורטיים מתוך המדידות.

יהי $\mathbb{F}$ שדה, ונסמן ב- $P_{\leq 3}$ את מרחב הפולינומים מעל $\mathbb{F}$ ממעלה לכל היותר 3. נייצג כל פולינום בבסיס הסטנדרטי בצורה

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3,$$

כלומר הווקטור המתאים הוא

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^4.$$

נגדיר שלוש פונקציות "מדידה" על פולינומים:

$$\ell_1(p) = p(0), \quad \ell_2(p) = p(1), \quad \ell_3(p) = p'(0).$$

נרצה לייצג את שלוש המדידות באמצעות מטריצה $A \in \mathbb{F}^{3 \times 4}$ כך שיתקיים לכל p :

$$A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1(p) \\ \ell_2(p) \\ \ell_3(p) \end{pmatrix}.$$

- מצאו במפורש את המטריצה A .
- מצאו בסיס למרחב השורות ובסיס למרחב העמודות של A , וכן את הממד של כל אחד מהם.
- קבעו האם קיימים פולינומים $p \in P_{\leq 3}$ כך שיתקיימו התנאים $p(0) = 1, \quad p(1) = 1, \quad p'(0) = 0$.
אם כן, מצאו את כל הפולינומים הללו.
- כמה חופש יש בבחירת פולינום כזה, כלומר מהו הממד האפיוני של קבוצת כל הפולינומים המקיימים את שלושת התנאים?

פתרון

נסמן

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

- נחשב את שלוש המדידות:

הערך בנקודה 0:

$$p(0) = a_0.$$

הערך בנקודה 1:

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3.$$

נגזרת הפולינום היא

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2,$$

ולכן

$$p'(0) = a_1.$$

לכן מתקיים

$$A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

מזה נובע ש

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- נדרג את A לפי שורות. נתחיל:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

נחסר את השורה הראשונה מהשורה השנייה:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

נחסר את השורה השלישית מהשורה השנייה:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

נסדר את השורות לצורה מדורגת:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

לצורה המדורגת יש שלוש שורות בלתי אפסיות, לכן

$$\text{rank}(A) = 3.$$

מרחב השורות נפרש על ידי השורות הבלתי אפסיות. בסיס נוח הוא

$$\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}.$$

עבור מרחב העמודות, בצורת השורה המדורגת המקום של האיברים המובילים הוא בעמודה הראשונה, השנייה והשלישית. לכן שלוש העמודות המתאימות במטריצה המקורית מהוות בסיס למרחב העמודות. העמודות הן

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

רואים מיד ש

$$c_4 = c_3.$$

לכן בסיס למרחב העמודות אפשר לבחור

$$\{c_1, c_2, c_3\},$$

וגם כאן הממד הוא

$$\dim(\text{Col}(A)) = 3.$$

3. נרצה לבדוק אם קיים פולינום p המקיים

$$p(0) = 1, \quad p(1) = 1, \quad p'(0) = 0.$$

בתנאי המטריצה זה שקול למערכת

$$A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

נכתוב את המערכת במפורש:

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1, \\ a_1 = 0. \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל

$$a_0 = 1.$$

מהמשוואה השלישית נקבל

$$a_1 = 0.$$

נציב במשוואה השנייה:

$$1 + 0 + a_2 + a_3 = 1.$$

נקבל

$$a_2 + a_3 = 0.$$

זו משוואה אחת בשני נעלמים a_2, a_3 , ולכן יש פרמטר חופשי אחד. מעל שדה אינסופי מתקבלים אינסוף פתרונות, ומעל שדה סופי $\mathbb{F}$ מתקבלים בדיוק $|\mathbb{F}|$ פתרונות. נסמן

$$t = a_2,$$

ואז

$$a_3 = -t.$$

לסיכום,

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = t, \quad a_3 = -t,$$

ולכן כל הפולינומים המתאימים הם מהצורה

$$p(x) = 1 + tx^2 - tx^3, \quad t \in \mathbb{F}.$$

4. מספר הנעלמים הוא 4, ודרגת המטריצה היא 3, לכן לפי משפט דרגה אפסות

$$\text{null}(A) = 4 - \text{rank}(A) = 4 - 3 = 1.$$

זה אומר שלמרחב המאפס של A יש ממד 1, ולכן גם במערכת $Ax = b$ לכל b במרחב העמודות, אם המערכת פתירה, קבוצת הפתרונות היא הזזה של הגרעין, כלומר ישר אפייני מממד 1. היא אינה בהכרח תת מרחב וקטורי.

במקרה שלנו הבדיקה במערכת הראתה שהמערכת אכן עקבית, והפרמטר החופשי t מתאר ישר של פתרונות. לכן הממד האפייני של קבוצת הפולינומים המקיימים את שלושת התנאים שווה ל-1, ויש "חופש אחד" בבחירת פולינום כזה, בהתאם למשפט דרגה אפסות.

שני חיישנים מודדים Ax עבור $x \in \mathbb{R}^3$, כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

חיישן נוסף מודד $z = ax_1 + bx_2 + cx_3$. מצאו תנאי הכרחי ומספיק לשחזור יחיד, ותנו דוגמה לחיישן מועיל ולחיישן שקריאותו נובעת משתי הקריאות הקיימות.

פתרון

ראשית נחשב אילו שינויים אינם מתגלים בשני החישובים:

$$Av = 0 \iff v_1 + 2v_3 = 0, v_2 - v_3 = 0 \iff v = t(-2, 1, 1)^T.$$

החישוב הנוסף מחזיר על שינוי כזה את

$$a(-2t) + bt + ct = (c - 2a + b)t.$$

שלוש המדידות קובעות את המצב ביחידות בדיוק כאשר הקריאה הזו מתאפסת רק ל- $t = 0$, כלומר

$$c - 2a + b \neq 0.$$

אפשר לאמת זאת גם על ידי הדטרמיננטה $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ a & b & c \end{pmatrix} = c + b - 2a$. החישוב $z = x_3$ מועיל. לעומתו, $z = x_1 + x_2 + x_3$ אינו מוסיף מידע, משום שהוא סכום שתי הקריאות הנתונות; עבור $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ התנאי אכן נכשל.

תרגיל ממבחן

1. יהי $n \geq 2$, ויהיו $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ כך ש- $B \neq 0$ ו- $\text{rank}(A) = n - 1$. הוכיחו שאם $AB = 0$, אז $\text{rank}(B) = 1$.

2. יהיו $A, B \in M_{2026}(\mathbb{R})$ כך ש- $AB = 0$. הוכיחו כי $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq 2026$.

פתרון

הקשר המרכזי בשני הסעיפים הוא

$$AB = 0 \implies \text{Im}(B) \subseteq \ker A.$$

אכן, כל $y \in \text{Im}(B)$ הוא מהצורה $y = Bx$ לכן $Ay = A(Bx) = (AB)x = 0$ ומכאן $y \in \ker A$.

1. מהכלת המרחבים ומשפט הממד מקבלים

$$\begin{aligned} \text{rank}(B) &= \dim \text{Im}(B) \\ &\leq \dim \ker A \\ &= n - \text{rank}(A) \\ &= n - (n - 1) = 1. \end{aligned}$$

מכיוון ש- $B \neq 0$, יש ל- B עמודה שאינה אפס, ולכן $\text{rank}(B) \geq 1$. שני החסמים יחד נותנים $\text{rank}(B) = 1$.

2. נשתמש באותה הכלה במרחב $\mathbb{R}^{2026}$:

$$\begin{aligned} \text{rank}(B) &= \dim \text{Im}(B) \\ &\leq \dim \ker A \\ &= 2026 - \text{rank}(A). \end{aligned}$$

העברת אגפים נותנת

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq 2026.$$

במילים: אם כל פלט של B מתאפס תחת A , מרחב הפלטים של B חייב להיכנס כולו לגרעין של A . לכן ממד התמונה של B מוגבל על ידי ממד הגרעין של A .

תרגול 8: העתקות לינאריות וקואורדינטות

עיקרון מנחה

מטרות התרגול. נזהה העתקות לינאריות, נחשב גרעין ותמונה, ונשתמש בקואורדינטות כדי לעבור בין פולינומים, מטריצות ווקטורים. נבחין בין עצם מתמטי לבין הייצוג שלו בבסיס נתון.

8.1 העתקות לינאריות

הגדרה פורמלית

יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. העתקה (או מיפוי) $T : V \rightarrow W$ נקראת **העתקה לינארית** אם לכל $v_1, v_2 \in V$ ולכל $\lambda \in \mathbb{F}$ מתקיים:

$$1. T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

$$2. T(\lambda v_1) = \lambda T(v_1)$$

אינטואיציה והסבר אפשר לחשוב על העתקה לינארית כעל כלל שמעביר וקטורים ממרחב אחד למרחב אחר, אבל שומר לחלוטין על המבנה הלינארי שלהם. כלומר, היא מכבדת גם חיבור וקטורים וגם כפל בסקלר, ואינה יוצרת "עיוותים" שאינם לינאריים. התנאי הראשון אומר שהעתקה לינארית אינה מבדילה בין "קודם לחבר ואז להעתיק" לבין "קודם להעתיק ואז לחבר". במילים אחרות, חיבור של וקטורים עובר דרך ההעתקה ללא שינוי. התנאי השני אומר שכפל של וקטור בסקלר מתנהג באותו אופן לפני ואחרי ההעתקה. אם וקטור נמתח או מתכווץ פי λ , גם התמונה שלו נמתחת או מתכווצת בדיוק באותו יחס.

הערה פורמלית

משתי התכונות יחד נובע שלכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ולכל $v_1, v_2 \in V$ מתקיים:

$$T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2),$$

כלומר העתקה לינארית שומרת על כל צירוף לינארי. אינטואיטיבית, העתקות לינאריות יכולות לבצע פעולות כמו מתיחה, כיווץ, סיבוב או שיקוף של המרחב, אך הן אינן יכולות "לעקם" קווים ישרים או להזיז את וקטור האפס. בפרט מתקיים תמיד

$T(0) = 0$, ולכן האפס במרחב המקור מועתק לאפס במרחב היעד. נסכם את ההערות:

- בהרצאה ראיתם הרחבה ל- $T(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i)$.
- תנאי הכרחי ללינאריות של העתקה $T: V \rightarrow W$ הינו $T(0_v) = 0_w$ (הוא לא מספיק כדי להוכיח שזו ה"ל, אבל נוח להפריך איתו)

יהי $n \geq 1$ ונגדיר

$$V = \mathbb{R}_{\leq n}[X].$$

בדקו האם ההעתקות הבאות הן העתקות לינאריות (שימו לב: לפני בדיקת לינאריות יש לוודא שההעתקה **מוגדרת היטב**, כלומר $T: V \rightarrow V$ באמת):

1. $T_1: V \rightarrow V$ המוגדרת על ידי

$$T_1(P(X)) := P(X) + P(0).$$

2. $T_2: V \rightarrow V$ המוגדרת על ידי

$$T_2(P(X)) := X \cdot P(X).$$

3. $T_3: V \rightarrow V$ המוגדרת על ידי

$$T_3(P(X)) := P(X+1) - P(1).$$

פתרון

נזכיר: $T: V \rightarrow V$ נקראת לינארית אם לכל $P, Q \in V$ ולכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$T(\alpha P + \beta Q) = \alpha T(P) + \beta T(Q).$$

1. T_1 היא העתקה לינארית.

(א) **מוגדרת היטב.** אם $P \in V$ אז $P(0) \in \mathbb{R}$ הוא קבוע, ולכן $P(X) + P(0)$ הוא פולינום ממעלה לכל היותר n . מכאן $T_1(P) \in V$.

(ב) **לינאריות.** יהיו $P, Q \in V$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. אז

$$T_1(\alpha P(X) + \beta Q(X)) = (\alpha P + \beta Q)(X) + (\alpha P + \beta Q)(0).$$

מאחר ש

$$(\alpha P + \beta Q)(X) = \alpha P(X) + \beta Q(X), \quad (\alpha P + \beta Q)(0) = \alpha P(0) + \beta Q(0),$$

נקבל

$$T_1(\alpha P(X) + \beta Q(X)) = \alpha(P(X) + P(0)) + \beta(Q(X) + Q(0)) = \alpha T_1(P(X)) + \beta T_1(Q(X)).$$

לכן T_1 לינארית.

2. T_2 אינה העתקה $V \rightarrow V$ ולכן אינה לינארית על V .

כדי שהעתקה תהיה לינארית, עליה להיות קודם כל מוגדרת היטב כ- $V \rightarrow V$. נראה ש- T_2 אינה מוגדרת היטב.

ניקח $P(X) = X^n \in V$ אז

$$T_2(P(X)) = X \cdot X^n = X^{n+1} \notin \mathbb{R}_{\leq n}[X] = V.$$

לכן T_2 אינה מגדירה העתקה $V \rightarrow V$, וממילא אינה העתקה לינארית על V .

הערה (הכללה). אם מגדירים במקום זאת

$$\tilde{T}_2 : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], \quad \tilde{T}_2(P(X)) := X \cdot P(X),$$

אז $\tilde{T}_2$ כן מוגדרת היטב וכן **לינארית**, כי לכל $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ ולכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{T}_2(\alpha P + \beta Q) = X(\alpha P + \beta Q) = \alpha XP + \beta XQ = \alpha \tilde{T}_2(P) + \beta \tilde{T}_2(Q).$$

3. T_3 היא העתקה לינארית.

(א) מוגדרת היטב. אם $P \in V$ אז $\deg P \leq n$, ולכן גם $\deg(P(X+1)) \leq n$. כמו כן

$P(1) \in \mathbb{R}$ הוא קבוע, ולכן $P(X+1) - P(1) \in V$. מכאן $T_3(P) \in V$.

(ב) לינאריות. יהיו $P, Q \in V$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. אז

$$T_3(\alpha P(X) + \beta Q(X)) = (\alpha P + \beta Q)(X+1) - (\alpha P + \beta Q)(1).$$

מאחר ש

$$(\alpha P + \beta Q)(X+1) = \alpha P(X+1) + \beta Q(X+1), \quad (\alpha P + \beta Q)(1) = \alpha P(1) + \beta Q(1),$$

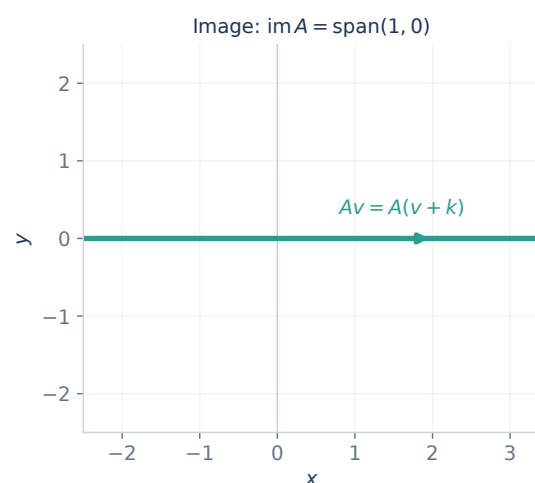
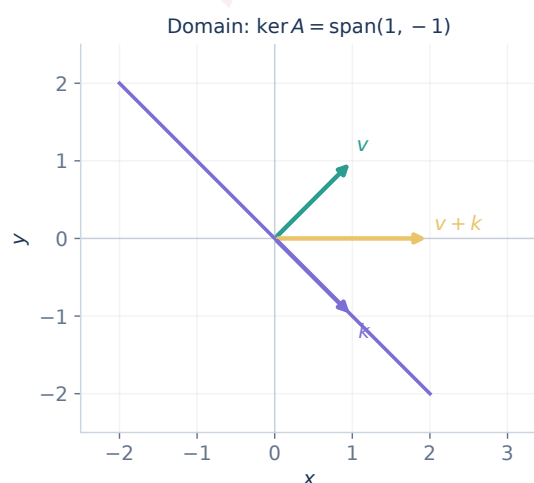
נקבל

$$\begin{aligned} T_3(\alpha P + \beta Q) &= \alpha(P(X+1) - P(1)) \\ &\quad + \beta(Q(X+1) - Q(1)) \\ &= \alpha T_3(P) + \beta T_3(Q). \end{aligned}$$

לכן T_3 לינארית.

עיקרון מנחה

שתי שאלות מנחות. הגרעין מתאר איזה מידע נעלם בהעתקה; התמונה מתארת אילו פלטים ניתן לקבל. גרעין טריוויאלי מבטיח שלא נאבד הבחנה בין קלטים, ותמונה השווה למרחב היעד מבטיחה שכל פלט אפשרי.



הגרעין נמצא במרחב המקור והתמונה במרחב היעד. כמה קלטים עשויים להישלח לאותו פלט כאשר הגרעין אינו טריוויאלי.

8.2 גרעין ותמונה של העתקה לינארית

תזכורת (מההרצאה)

תהי $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית.
הגרעין של T : קבוצת כל הווקטורים שמועתקים לווקטור האפס 0_W במרחב היעד

$$\ker(T) = \{v \in V | T(v) = 0\}$$

הגרעין הוא תת-מרחב של המרחב V
התמונה של T : אוסף כל התמונות שהעתקה מחזירה:

$$\text{Im}(T) = \{T(v) | v \in V\} = \{w \in W | \exists v \in V, T(v) = w\}$$

התמונה היא תת-מרחב של W . שימו לב שהתמונה היא אוסף הפלטים שמתקבלים בפועל, ואילו מרחב היעד W נקבע כחלק מהגדרת ההעתקה. אין הכרח שיתקיים שוויון ביניהם.
 נשים לב כי $\ker(T), \text{Im}(T) \neq \emptyset$ אינן ריקות, כי מתקיים $T(0) = 0$.

- מתקיים $\text{Im} T \subseteq W$. אם מתקיים שוויון $\text{Im}(T) = W$ אז ההעתקה נקראת **על**
- T נקראת **חד-חד-ערכית (חח ע)** אם התנאי הבא מתקיים: לכל $v_1, v_2 \in V$:

$$T(v_1) = T(v_2) \implies v_1 = v_2$$

באופן שקול: אם לא קיימים מקורות שונים שמועתקים לאותה התמונה.

$$v_1 \neq v_2 \implies T(v_1) \neq T(v_2)$$

- T נקראת **איזומורפיזם** אם T חח ע ועל.
- שני מרחבים וקטוריים V ו- W נקראים **איזומורפים** אם קיים איזומורפיזם $T: V \rightarrow W$. במקרה כזה נכתוב $V \cong W$.

טענה 8.2

העתקה לינארית $T: V \rightarrow W$ היא **חח ע** אם ורק אם $\ker(T) = \{0\}$.
 נשים לב שאם מדובר במערכת משוואות לינארית הומוגנית - האמור לעיל שקול לכך שיש לה רק פתרון טריויאלי.

טענה 8.3

תהי $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית בין זוג מרחבים וקטוריים מממד סופי. אז

1. אם T **חח ע** אז $\dim(V) \leq \dim(W)$.
2. אם T **על** אז $\dim(W) \leq \dim(V)$.
3. אם $\dim(V) = \dim(W)$ אז T **חח ע** אם ורק אם T על.

יהי $n \geq 2$ ונסמן $V = M_n(\mathbb{F})$. נגדיר העתקה $T : V \rightarrow \mathbb{F}$ על ידי

$$T(A) = \text{Tr}(A).$$

1. הוכיחו ש- T לינארית.
2. מצאו את $\ker(T)$.
3. מצאו את $\text{Im}(T)$.
4. חשבו את $\dim \ker(T)$ ואת $\dim \text{Im}(T)$, ובדקו את משפט הממד.

פתרון

נסמן $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$.

1. לינאריות:

$$T(A+B) = \text{Tr}(A+B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = T(A) + T(B),$$

ולכל $\lambda \in \mathbb{F}$,

$$T(\lambda A) = \text{Tr}(\lambda A) = \sum_{i=1}^n \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^n a_{ii} = \lambda T(A).$$

לכן T לינארית.

2. גרעין:

$$\ker(T) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) : \text{Tr}(A) = 0\}.$$

זהו תת המרחב של המטריצות בעלות עקבה אפס.

3. תמונה: לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ קחו

$$A = \text{diag}(\alpha, 0, \dots, 0) \in M_n(\mathbb{F}),$$

ואז $\text{Tr}(A) = \alpha$. לכן

$$\text{Im}(T) = \mathbb{F}.$$

4. ממדים: $\dim M_n(\mathbb{F}) = n^2$. מאחר ש- $\text{Im}(T) = \mathbb{F}$ נקבל $\dim \text{Im}(T) = 1$, ולכן לפי משפט הממד:

$$\dim \ker(T) = n^2 - 1.$$

אפשר לראות זאת גם ישירות: $n^2 - 1$ רכיבים נבחרים בחופשיות, והרכיב האלכסוני האחרון נקבע מן התנאי שסכום האלכסון הוא אפס.

נסמן $V = C[0, 1]$ (מרחב כל הפונקציות הרציפות על $[0, 1]$). נגדיר העתקה

$$S : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(f) = \int_0^1 f(x) dx.$$

1. הוכיחו ש- S העתקה לינארית.
2. מצאו את $\ker(S)$.
3. מצאו את $\text{Im}(S)$.
4. תנו דוגמה מפורשת ל- $f \neq 0$ כך ש- $f \in \ker(S)$.

פתרון

1. לינאריות: לכל $f, g \in V$ ולכל $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$S(f+g) = \int_0^1 (f+g) = \int_0^1 f + \int_0^1 g = S(f) + S(g),$$

$$S(\lambda f) = \int_0^1 \lambda f = \lambda \int_0^1 f = \lambda S(f).$$

לכן S לינארית.

2. גרעין:

$$\ker(S) = \left\{ f \in C[0,1] : \int_0^1 f(x) dx = 0 \right\}.$$

המרחב $C[0,1]$ אינו מממד סופי, ולכן אין להציב כאן ממדים בנוסחה של מספרים שלמים מהמשפט הסופי. ובכל זאת מתקיים הפירוק

$$C[0,1] = \ker(S) \oplus \text{span}\{1\}, \quad f = (f - S(f) \cdot 1) + S(f) \cdot 1.$$

אכן, האיבר הראשון בעל אינטגרל אפס, ופונקציה קבועה בעלת אינטגרל אפס היא פונקציית האפס.

3. תמונה: לכל $c \in \mathbb{R}$ קחו $f(x) \equiv c$. אז

$$S(f) = \int_0^1 c dx = c,$$

ולכן $\text{Im}(S) = \mathbb{R}$.

4. דוגמה: $f(x) = x - \frac{1}{2}$ היא רציפה ואינה אפס, אבל

$$\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

ולכן $f \in \ker(S)$.

יהיו V מרחב וקטורי (מעל שדה F) ו- $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית. הוכיחו:
א. $\ker(T) \subseteq \ker(T^2)$ ב. $\text{Im}(T^2) \subseteq \text{Im}(T)$

פתרון

א. נרצה להראות שכל איבר בקבוצה מצד שמאל של הביטוי, נמצא גם בקבוצה שבצד ימין.

יהי $v \in \ker(T)$. אז $T^2(v) = T(T(v)) = T(0) = 0$ ולכן $v \in \ker(T^2)$.

ב. יהי $w \in \text{Im}(T^2)$. אז קיים $v \in V$ כך ש- $w = T^2(v) = T(T(v))$.

נסמן $u = T(v)$. אז $w = T(u)$ ולכן $w \in \text{Im}(T)$.

הגדרה פורמלית

אם $T: V \rightarrow W$ הוא איזומורפיזם אזי לכל $w \in W$ קיים $v \in V$ יחיד כך ש- $T(v) = w$.
ולכן אפשר להגדיר העתקה הפוכה $T^{-1}: W \rightarrow V$ על ידי $T^{-1}(w) = v$ כאשר $w = T(v)$.
במילים: בהנתן v , נפעיל עליו את T ונקבל את w . וההפך: אם נקבל w , נפעיל עליו את T^{-1} .

ונקבל את v .נסמן $V = M_3(\mathbb{R})$.1. מצאו איזומורפיזם לינארי $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^9$.

2. בסעיף זה בחרו במפורש את איזומורפיזם הפריסה לפי שורות:

$$\Phi((a_{ij})) = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}).$$

נגדיר שתי קבוצות ב- $\mathbb{R}^9$:

$$U = \{x \in \mathbb{R}^9 \mid x_2 = x_4, x_3 = x_7, x_6 = x_8\},$$

$$W = \{x \in \mathbb{R}^9 \mid x_1 = x_5 = x_9 = 0, x_2 = -x_4, x_3 = -x_7, x_6 = -x_8\}.$$

מצאו את הממדים $\dim U$ ו- $\dim W$, וקבעו את $A = \Phi^{-1}(U)$ ואת $B = \Phi^{-1}(W)$ (כלומר אפיינו את תתי המרחב המתאימים ב- $M_3(\mathbb{R})$).

פתרון

1. נגדיר $\Phi : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^9$ על ידי לכל $A = (a_{ij})$:

$$\Phi(A) = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}).$$

נבדוק ש- Φ איזומורפיזם.

לינאריות. יהיו $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. אז $\alpha A + \beta B$ היא המטריצה שאיבריה $(\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})$, ולכן

$$\Phi(\alpha A + \beta B) = (\alpha a_{11} + \beta b_{11}, \dots, \alpha a_{33} + \beta b_{33}) = \alpha \Phi(A) + \beta \Phi(B).$$

חד חד ערכיות. אם $\Phi(A) = \Phi(B)$ אז כל 9 הקואורדינטות שוות ולכן $a_{ij} = b_{ij}$ לכל i, j , ומכאן $A = B$.

על. יהי $x = (x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{R}^9$. נגדיר

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}.$$

אז לפי ההגדרה $\Phi(A) = x$. מכאן Φ על.לכן Φ איזומורפיזם.

2. נחשב ממדים ונזהה את תתי המרחב המתאימים במטריצות.

חישוב $\dim U$. הווקטור $x \in \mathbb{R}^9$ נקבע ע"י בחירה חופשית של

$$x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_9,$$

ואז התנאים כופים

$$x_4 = x_2, \quad x_7 = x_3, \quad x_8 = x_6.$$

לכן יש 6 פרמטרים חופשיים ומתקבל

$$\dim U = 6.$$

חישוב $\dim W$. הווקטור $x \in W$ מקיים

$$x_1 = x_5 = x_9 = 0,$$

וכן התנאים

$$x_4 = -x_2, \quad x_7 = -x_3, \quad x_8 = -x_6.$$

לכן נקבעים באופן חופשי בדיוק

$$x_2, x_3, x_6,$$

ואז כל השאר נקבע. לכן

$$\dim W = 3.$$

כעת נזהה את $A = \Phi^{-1}(U)$. יהי $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ ונסמן $\Phi(A) = (x_1, \dots, x_9)$, כלומר

$$x_1 = a_{11}, \quad x_2 = a_{12}, \quad x_3 = a_{13},$$

$$x_4 = a_{21}, \quad x_5 = a_{22}, \quad x_6 = a_{23},$$

$$x_7 = a_{31}, \quad x_8 = a_{32}, \quad x_9 = a_{33}.$$

התנאים של U הם

$$x_2 = x_4 \Rightarrow a_{12} = a_{21}, \quad x_3 = x_7 \Rightarrow a_{13} = a_{31}, \quad x_6 = x_8 \Rightarrow a_{23} = a_{32}.$$

אלו בדיוק התנאים $A^T = A$. לכן

$$\Phi^{-1}(U) = \text{Sym}_3 = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}.$$

באופן דומה נזהה את $B = \Phi^{-1}(W)$. התנאים של W נותנים

$$x_1 = x_5 = x_9 = 0 \Rightarrow a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0,$$

וגם

$$x_2 = -x_4 \Rightarrow a_{12} = -a_{21}, \quad x_3 = -x_7 \Rightarrow a_{13} = -a_{31}, \quad x_6 = -x_8 \Rightarrow a_{23} = -a_{32}.$$

אלו בדיוק התנאים $A^T = -A$. לכן

$$\Phi^{-1}(W) = \text{Skew}_3 = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}.$$

לסיכום:

$$\dim U = 6, \quad \dim W = 3, \quad \Phi^{-1}(U) = \text{Sym}_3, \quad \Phi^{-1}(W) = \text{Skew}_3.$$

8.3 משפט הממדים להעתקות לינאריות

8.8. טענה

תהי $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית, כאשר V מממד סופי. אז

$$\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T.$$

קבעו האם קיימת העתקה לינארית המקיימת את הנדרש. במידה וקיימת - מצאו אותה מפורשות.

1. $T: R^3 \rightarrow R^3$ עם $\operatorname{Im} T = \operatorname{Sp} \{(1, 1, 1)\}$, $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Sp} \{(1, 2, 1)\}$.

2. $T: M_{2 \times 2}(R) \rightarrow R^2$ כאשר $\ker T = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

פתרון

1. התמונה והגרעין של T נפרשים על ידי וקטור אחד כל אחד ולכן ממדים 1 ממשפט הממדים:

$$3 = \dim(R^3) = \dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T = 1 + 1 = 2$$

וזו סתירה - לכן לא קיימת כזו העתקה.

2. לא קיימת העתקה כזו. מהנתון כיוון ש- $\ker T$ נפרש על ידי וקטור (מטריצה) יחיד אז $\dim \ker T = 1$. ממשפט הממדים נקבל:

$$\dim \operatorname{Im} T = \dim(M_{2 \times 2}(R)) - \dim \ker T = 4 - 1 = 3$$

מצד שני $\operatorname{Im} T \subseteq R^2$ ולכן ממשפט שלמדנו $\dim \operatorname{Im} T \leq \dim(R^2) = 2$ וזו סתירה. ולכן לא קיימת כזו העתקה.

8.4 קואורדינטות

הגדרה פורמלית

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ בעל בסיס סדור $B = (v_1, \dots, v_n)$. אנו יודעים כי לכל וקטור $v \in V$ קיימת הצגה יחידה כצ"ל של הווקטורים ב- B , כלומר, קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ יחידים כך ש-

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

המקדמים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ נקראים הקואורדינטות של v ביחס ל- B .

הווקטור $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$ נקרא וקטור הקואורדינטות של v לפי הבסיס B ומסומן ב- $[v]_B$.

נתון הבסיס הסדור $B = ((1, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T, (1, 1, 1)^T)$ של $\mathbb{R}^3$. מצאו את קואורדינטות $v = (5, 2, 4)^T$ ביחס אליו ואמתו את התוצאה בהרכבת v מחדש.

פתרון

נחפש a, b, c כך ש- $v = a(1, 0, 1)^T + b(0, 1, 1)^T + c(1, 1, 1)^T$. השוואת הרכיבים נותנת

$$a + c = 5, \quad b + c = 2, \quad a + b + c = 4.$$

נחבר את שתי המשוואות הראשונות ונחסר את השלישית: $c = 5 + 2 - 4 = 3$. מכאן $a = 5 - 3 = 2$ ו- $b = 2 - 3 = -1$ ולכן

$$[v]_B = (2, -1, 3)^T.$$

בדיקה: $2(1, 0, 1)^T - (0, 1, 1)^T + 3(1, 1, 1)^T = (5, 2, 4)^T$. ההצגה יחידה כי מטריצת עמודות הבסיס היא בעלת דטרמיננטה $-1 \neq 0$.

בכיוון ההפוך, אם נדע את וקטור הקואורדינטות של v ביחס לבסיס נתון, נוכל לשחזר את v (כפי שנראה בדוגמה הבאה).

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ אמ"מ } v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

עבור הבסיס הסדור $B = ((1, 2)^T, (2, 3)^T)$ נתון $[v]_B = (-2, 3)^T$. מצאו את v בקואורדינטות הסטנדרטיות. הסבירו מדוע שני וקטורי הקואורדינטות אינם בדרך כלל אותו וקטור מספרי.

פתרון

לפי הגדרת הקואורדינטות, הכניסות הן מקדמי וקטורי הבסיס:

$$v = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 6 \\ -4 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

הבסיס תקין משום ש- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 4 = -1$. הווקטור $(-2, 3)^T$ מתאר מקדמים ביחס ל- B , ואילו $(4, 5)^T$ מתאר מקדמים ביחס לבסיס הסטנדרטי. אלו שתי הצגות של אותו איבר במרחב.

8.12. טענה

יהי V מרחב וקטורי מממד n מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי B בסיס סדור של V . ההעתקה $T_B: V \rightarrow \mathbb{F}^n$ הנתונה על ידי $T_B(v) = [v]_B$ הינה איזומורפיזם של מרחבים וקטורים. כלומר, $V \cong \mathbb{F}^n$.

תזכורת (מההרצאה)

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, B בסיס סדור של V ו- $\{u_1, \dots, u_m\}$ קבוצת וקטורים ב- V . אז:

1. $\{u_1, \dots, u_m\}$ בת"ל (ב- V) אמ"מ $\{[u_1]_B, \dots, [u_m]_B\}$ בת"ל (ב- $\mathbb{F}^n$).

2. $\{u_1, \dots, u_m\}$ פורשת את V אמ"מ $\{[u_1]_B, \dots, [u_m]_B\}$ פורשת את $\mathbb{F}^n$.

3. $\{u_1, \dots, u_m\}$ בסיס של V אמ"מ $\{[u_1]_B, \dots, [u_m]_B\}$ בסיס של $\mathbb{F}^n$.

הראו באמצעות קואורדינטות בבסיס $(1, X, X^2)$ כי הפולינומים

$$p_1 = 1 + X, \quad p_2 = X + X^2, \quad p_3 = 1 + X + X^2$$

בלתי תלויים לינארית ב- $\mathbb{R}_2[X]$.

פתרון

עמודות הקואורדינטות הן

$$[p_1] = (1, 1, 0)^T, \quad [p_2] = (0, 1, 1)^T, \quad [p_3] = (1, 1, 1)^T.$$

אם $ap_1 + bp_2 + cp_3 = 0$, השוואת המקדמים של $1, X, X^2$ נותנת

$$a + c = 0, \quad a + b + c = 0, \quad b + c = 0.$$

מחסרים את הראשונה מהשנייה ומקבלים $b = 0$. מן השלישית $c = 0$, ומהראשונה $a = 0$. לכן רק הצירוף הטריטוריאלי מתאפס והפולינומים בלתי תלויים. מאחר שממד המרחב 3, הם גם בסיס; מטריצת הקואורדינטות בעלת דטרמיננטה 1.

נגדיר את המרחב $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

נגדיר שני תתי מרחב

$$U := \text{span}\{U_1, U_2, U_3\}, \quad V := \text{span}\{V_1, V_2\},$$

כאשר

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. מצאו בסיס וממד עבור U ועבור V .

2. מצאו בסיס וממד עבור $U \cap V$.

פתרון

נשתמש בהעתקה לינארית

$$\Phi : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \Phi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = (a, b, c, d),$$

שח"ע ועל (ולכן שומרת על תלות לינארית וממדים).

1. נחשב בסיס וממד של U ושל V .

נחשב קואורדינטות:

$$\Phi(U_1) = (1, 0, 0, 0), \quad \Phi(U_2) = (0, 1, 0, 0), \quad \Phi(U_3) = (0, 0, 1, 1).$$

אם

$$\alpha \Phi(U_1) + \beta \Phi(U_2) + \gamma \Phi(U_3) = (0, 0, 0, 0),$$

נקבל לפי רכיבים

$$(\alpha, \beta, \gamma, \gamma) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

לכן $\{\Phi(U_1), \Phi(U_2), \Phi(U_3)\}$ בלתי תלויה, ומכאן $\{U_1, U_2, U_3\}$ בסיס של U ו

$$\dim U = 3.$$

כעת עבור V :

$$\Phi(V_1) = (1, 0, 1, 1), \quad \Phi(V_2) = (0, 1, 2, 2).$$

אם

$$\alpha\Phi(V_1) + \beta\Phi(V_2) = (0, 0, 0, 0),$$

נקבל

$$(\alpha, \beta, \alpha + 2\beta, \alpha + 2\beta) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0.$$

לכן $\{\Phi(V_1), \Phi(V_2)\}$ בלתי תלויה, ומכאן $\{V_1, V_2\}$ בסיס של V ו

$$\dim V = 2.$$

2. נמצא בסיס וממד של $U \cap V$.

נראה קודם ש- $V \subseteq U$ על ידי כתיבה מפורשת של היוצרים של V באמצעות היוצרים של U :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = U_1 + U_3,$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = U_2 + 2U_3.$$

לכן $V_1, V_2 \in U$, ומכאן $V \subseteq U$.

כעת, תמיד מתקיים $U \cap V = V$ כאשר $V \subseteq U$. לכן

$$U \cap V = V = \text{span}\{V_1, V_2\}, \quad \dim(U \cap V) = \dim V = 2.$$

8.5 חמש דרכים לתאר העתקה לינארית

נגדיר העתקה $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ כך שלכל

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

מתקיים:

$$T(x, y) = (x + y, x - y).$$

זוהי ההעתקה שאותה נגדיר כעת בכמה דרכים שונות.

דרך 1: נוסחה כללית על וקטור כללי

זוהי **נוסחה כללית** משום שהיא מתארת את $T(v)$ עבור וקטור כללי $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, ולא עבור וקטורים ספציפיים בלבד:

$$T(x, y) = (x + y, x - y).$$

בדרך זו מגדירים את ההעתקה ישירות על כל המרחב.

דרך 2: קביעת תמונות של בסיס

נבחר את הבסיס הסטנדרטי:

$$e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1).$$

נחשב:

$$T(e_1) = T(1, 0) = (1, 1), \quad T(e_2) = T(0, 1) = (1, -1).$$

כעת לכל $(x, y) = xe_1 + ye_2$ נגדיר לפי ליניאריות:

$$T(x, y) = xT(e_1) + yT(e_2) = x(1, 1) + y(1, -1) = (x + y, x - y).$$

כלומר, קביעת התמונות של הבסיס מגדירה את אותה העתקה.

דרך 3: הגדרה באמצעות מטריצה

נכתוב את הווקטור כעמודה:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

נגדיר:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

אז:

$$T(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

המטריצה מייצגת את אותה העתקה ביחס לבסיס הסטנדרטי.

דרך 4: הגדרה באמצעות פעולה אלגברית אחרת מוכרת שהיא לינאריתניתן לראות את T כפעולה שמבצעת:

- רכיב ראשון: סכום הקואורדינטות
- רכיב שני: הפרש הקואורדינטות

כלומר:

$$T(x, y) = (\text{sum}(x, y), \text{diff}(x, y)),$$

כאשר אלו פעולות ליניאריות, ולכן גם T ליניארית.**דרך 5: פירוק מבני**נגדיר את T כהעתקה שמקיימת:

$$T(e_1 + e_2) = (2, 0), \quad T(e_1 - e_2) = (0, 2),$$

ובנוסף היא ליניארית.

מאחר ש- $\{e_1 + e_2, e_1 - e_2\}$ הוא בסיס של $\mathbb{R}^2$, ההעתקה נקבעת באופן יחיד, ובחישוב מתקבלת אותה נוסחה:

$$T(x, y) = (x + y, x - y).$$

הערות

- **נוסחה כללית** פירושה הגדרה של $T(v)$ עבור וקטור כללי v .
- אותה העתקה ליניארית ניתנת להגדרה ע"י נוסחה, בסיס, מטריצה או באמצעות אפיון מבני.
- ההבדל הוא באופן ההצגה, לא בהעתקה עצמה.

8.5.1 סיכום הדרכים

תזכורת (מההרצאה)

1. נוסחה מפורשת על וקטור כללי

מגדירים T ע"י נוסחה מפורשת עבור $v \in V$.

מה בודקים: שהנוסחה מוגדרת לכל $v \in V$, ושתי תכונות הליניאריות מתקיימות.

2. קביעת תמונות של בסיס והרחבה ליניארית

אם $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V , בוחרים באופן חופשי

$$T(v_1), \dots, T(v_n) \in W$$

ואז מגדירים לכל $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$:

$$T(v) := \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i).$$

כל בחירה של תמונות לבסיס מגדירה העתקה ליניארית אחת ויחידה.

3. הגדרה באמצעות מטריצה

כאשר $V = \mathbb{F}^n$ ו- $W = \mathbb{F}^m$, ניתן להגדיר:

$$T(x) = Ax$$

כאשר A מטריצה $m \times n$.

כל מטריצה מגדירה העתקה ליניארית, וכל העתקה ליניארית מיוצגת ע"י מטריצה לאחר בחירת בסיסים.

הערה: המטריצה תלויה בבחירת הבסיסים, ההעתקה עצמה לא.

4. הגדרה באמצעות פעולה אלגברית מוכרת

מגדירים T ע"י פעולה שמופיעה טבעית במתמטיקה, למשל גזירה/אינטגרל/כפל קבוע. דוגמאות:

$$T(P) = P', \quad T(f) = \int_0^1 f(x) dx.$$

בכל מקרה יש לציין תחום ומרחב יעד, לוודא שהפעולה מוגדרת היטב ולבדוק את תכונות הליניאריות.

5. הגדרה באמצעות פירוק לסכום ישר

לעיתים מגדירים את T ע"י תכונה שהיא מקיימת, למשל על פירוק V כסכום ישר. לדוגמה: אם $V = U \oplus W$, מגדירים את ההעתקה T כך ש:

$$T(u) = 0 \quad (\forall u \in U), \quad T(w) = w \quad (\forall w \in W).$$

כאן הליניאריות נובעת ממבנה הסכום הישר וההגדרה על הרכיבים.

אזהרות וטעויות נפוצות

- תוספת קבוע שוברת ליניאריות: למשל $T(v) = v + b$ (עם $b \neq 0$) איננה ליניארית.
- תמיד לציין תחום וטווח: $T: V \rightarrow W$.
- להבחין בין וקטור, קואורדינטות של וקטור בבסיס, ומטריצה מייצגת.

מערכת קולטת שלוש דגימות $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ ומסירה מהן את הממוצע. נגדיר

$$P(x) = x - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

הוכיחו ש- P ליניארית, חשבו את הגרעין ואת התמונה, והראו שהפעלה שנייה אינה משנה את התוצאה: $P^2 = P$.

פתרון

נסמן $\mu(x) = (x_1 + x_2 + x_3)/3$ ו- $\mathbf{1} = (1, 1, 1)^T$. לכל x, y וסקלרים a, b מתקיים

$$\mu(ax + by) = a\mu(x) + b\mu(y),$$

ולכן

$$P(ax + by) = ax + by - (a\mu(x) + b\mu(y))\mathbf{1} = aP(x) + bP(y).$$

מכאן P ליניארית. אם $P(x) = 0$, אז $x = \mu(x)\mathbf{1}$, ולהפך כל וקטור קבוע כזה נשלח לאפס. לכן

$$\ker P = \text{span}\{\mathbf{1}\}, \quad \dim \ker P = 1.$$

לכל x סכום רכיבי $P(x)$ הוא 0 הוא $x_1 + x_2 + x_3 - 3\mu(x) = 0$. לכן התמונה מוכלת במישור

$$H = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_1 + y_2 + y_3 = 0\}.$$

אם $y \in H$, אז $\mu(y) = 0$ ולכן $P(y) = y$. מכאן $H \subseteq \text{Im } P$, ולכן

$$\text{Im } P = H = \text{span}\{(1, -1, 0)^T, (1, 0, -1)^T\}, \quad \dim \text{Im } P = 2.$$

לבסוף $P(x) \in H$, ולכן $P(P(x)) = P(x)$. בדיקת ממדים: $1 + 2 = 3$. פירוש התוצאה הוא שהסרת ממוצע מעלימה את הרכיב הקבוע ומשאירה את השינויים בין הדגימות; לאחר ההסרה הראשונה הממוצע כבר אפס.

תרגול 9: העתקות לינאריות וייצוג מטריציוני

עיקרון מנחה

בסיום התרגול תוכלו לבנות העתקה מתוך תמונות של וקטורים, לבדוק התאמה לתלויות לינאריות, לחשב מטריצה מייצגת ולהחליף בסיס. הדגש הוא על הקשר בין פעולה מופשטת, קואורדינטות וחישוב מטריציוני.

9.1 קביעת העתקה לפי תמונות של וקטורים

טענה 9.1

יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$, יהי $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס סדור של V , ויהיו $w_1, \dots, w_n \in W$ וקטורים כלשהם, שאינם חייבים להיות בלתי תלויים. קיימת העתקה לינארית יחידה $T: V \rightarrow W$ המקיימת $T(v_i) = w_i$ לכל i . במפורש, אם $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, אז

$$T(v) = \sum_{i=1}^n a_i w_i.$$

ההגדרה תקינה משום שההצגה בבסיס יחידה; היא לינארית משום שקואורדינטות של סכום ושל כפל בסקלר מחושבות רכיב אחר רכיב. כל העתקה המקיימת את התמונות הנתונות חייבת לפעול לפי נוסחה זו, ולכן היא יחידה. בפרט, בין כל שני מרחבים מעל אותו שדה קיימת לפחות העתקה לינארית אחת: העתקת האפס.

קבעו האם קיימת ה"ל T המקיימת את הדרישות. אם קיימת - מצאו לה צורה מפורשת.

1. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ כך ש:

$$T\left(\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{u_1}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T\left(\overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}^{u_2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T\left(\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{u_3}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. האם קיימת העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ המקיימת

$$T \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}?$$

פתרון

1. נבדוק איתלות ללא שימוש בדטרמיננטה. אם $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$, השוואת רכיבים נותנת

$$a + 2b + c = 0, \quad a - b = 0, \quad a + 2b = 0.$$

מהמשוואה השנייה $a = b$, ומהשלישית $3b = 0$. לכן $a = b = 0$, ומהראשונה גם $c = 0$. לכן הם בסיס של $\mathbb{R}^3$, ולפי המשפט קיימת העתקה לינארית יחידה עם התמונות הנתונות.

נמצא אותה: תחילה נבדוק כיצד T כנתון פועלת על וקטורי הבסיס הסטנדרטי e_1, e_2, e_3 - לכן נרצה לבטא אותם על ידי צירוף לינארי של הוקטורים הנתונים.

נזהה כי $e_1 = u_3$, ועבור הוקטור השני: נרשום $e_2 = au_1 + bu_2 + cu_3$. נקבל מערכת משוואות במקדמים a, b, c ,

$$a = \frac{2}{3}, b = -\frac{1}{3}, c = 0.$$

נדרג ונפתור: $a = \frac{2}{3}, b = -\frac{1}{3}, c = 0$. באופן דומה עבור e_3 , וסה"כ נקבל:

$$e_1 = u_3, \quad e_2 = \frac{2}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_2, \quad e_3 = u_1 - e_1 - e_2$$

כעת נשתמש בלינאריות ובתמונות הנתונות:

$$T(e_1) = T(u_3) = e_1,$$

$$T(e_2) = \frac{2}{3}T(u_1) - \frac{1}{3}T(u_2) = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_1,$$

$$T(e_3) = T(u_1) - T(e_1) - T(e_2) = 3e_1 - e_1 - 2e_1 = 0.$$

לכל $v = (x, y, z)^T = xe_1 + ye_2 + ze_3$ נקבל

$$T(v) = xT(e_1) + yT(e_2) + zT(e_3) = xe_1 + 2ye_1 = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

בדיקה ישירה של שלושת וקטורי הנתון מחזירה את התמונות הדרושות.

2. נסמן כעת $u_3 = (0, 1, 0)^T, u_2 = (1, -1, 2)^T, u_1 = (3, 2, 6)^T$. אלה וקטורים תלויים לינארית, שכן

$$u_1 - 3u_2 - 5u_3 = (3 - 3, 2 + 3 - 5, 6 - 6)^T = 0.$$

נשתמש במשפט: אם T ה"ל אז $T(0) = 0$. נחשב:

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$T \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - 3T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 5T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ -12 \\ -8 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן T כזאת לא קיימת.

דיוק חשוב: בדיקת יחס תלות יחיד עשויה להספיק לשלילת קיום ההעתקה. כדי להוכיח קיום, יש לוודא שכל יחסי התלות בין וקטורי המקור נשמרים בתמונות.

עיקרון מנחה

קריטריון קיום להעתקה עם תמונות נתונות. הדרישות $T(u_i) = w_i$ ניתנות למימוש בהעתקה לינארית אם ורק אם לכל מקדמים a_i מתקיים

$$\sum_i a_i u_i = 0 \implies \sum_i a_i w_i = 0.$$

אכן, במקרה זה אפשר להגדיר על $U = \text{span}\{u_i\}$ את $T(\sum_i a_i u_i) = \sum_i a_i w_i$. אם קיימות שתי הצגות, הפרשן הוא יחס תלות, ולכן התמונות שלהן שוות. הלינאריות נובעת מן ההגדרה. במרחב מקור מממד סופי אפשר להרחיב בסיס של U לבסיס של V ולהגדיר תמונות שרירותיות לאיברים הנוספים. ההעתקה יחידה אם $U = V$; אם $U \neq V$ ו- $W \neq \{0\}$, אפשר לבחור שתי תמונות שונות לאחד מאיברי הבסיס הנוספים, ולכן ההרחבה אינה יחידה. כאשר u_i כבר מהווים בסיס, אין יחסי תלות לא-טריוויאליים וכל בחירת תמונות מגדירה העתקה יחידה.

יהיו $V = \mathbb{R}^2$ ו- $W = \mathbb{R}_3[X]$. מצאו את ההעתקה הלינארית היחידה $T: V \rightarrow W$ המקיימת

$$T((1,0)^T) = 2 + X^2, \quad T((1,1)^T) = 1 + X + X^2.$$

כתבו נוסחה מפורשת ל- $T((x,y)^T)$.

פתרון

הווקטורים $(1,0)^T, (1,1)^T$ הם בסיס, כי דטרמיננטת עמודותיהם היא 1. לכל וקטור יש ההצגה היחידה

$$(x,y)^T = (x-y)(1,0)^T + y(1,1)^T.$$

לכן הלינאריות מחייבת

$$\begin{aligned} T((x,y)^T) &= (x-y)(2 + X^2) + y(1 + X + X^2) \\ &= 2x - 2y + (x-y)X^2 + y + yX + yX^2 \\ &= (2x - y) + yX + xX^2. \end{aligned}$$

הנוסחה אכן מגדירה העתקה לינארית, כי כל מקדם הוא ביטוי לינארי ב- x, y . בנקודות הנתונות מתקבלים $2 + X^2$ ו- $1 + X + X^2$, ולכן היא גם מקיימת את שתי הדרישות. קיום יחידות נובעים מכך שנקבעו תמונות בסיס.

9.2 הרכבת העתקות

תזכורת (מההרצאה)

- יהיו U, V, W מרחבים ווקטוריים מעל השדה $\mathbb{F}$
- תהיינה $T: U \rightarrow V, S: V \rightarrow W$ העתקות לינאריות
- ההרכבה $S \circ T: U \rightarrow W$, המוגדרת לכל $u \in U$ על ידי $(S \circ T)(u) = S(T(u))$ נקראת **ההרכבה של S ו- T** .
- $S \circ T$ הינה בעצמה העתקה לינארית מעל השדה F
- אם שתי ההעתקות על, אז גם ההרכבה על. אם שתיהן חד-חד-ערכיות, אז גם ההרכבה חד-חד-ערכית. בפרט, הרכבה של שני איזומורפיזמים היא איזומורפיזם.

חשבו את הרכבת הה"ל הבאות $S \circ T$:
 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ הנתונה על ידי $T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix}$
 והעתקה $S: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ הנתונה על ידי $S \begin{pmatrix} q & r \\ s & t \end{pmatrix} = tX^2 + (r+s)X + q$

פתרון

נחשב את ההרכבה $S \circ T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$. יהי $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. אזי

$$S \circ T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = S \left(T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) = S \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix} = bX^2 + 2aX + a$$

9.3 ייצוג העתקה ע"י מטריצה

הגדרה פורמלית

יהי U מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, מממד n , עם בסיס $B = \{u_1, \dots, u_n\}$
 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, מממד m , עם בסיס $C = \{v_1, \dots, v_m\}$.
 תהי $T: U \rightarrow V$ ה"ל. נגדיר את המטריצה:

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(u_1)]_C & [T(u_2)]_C & \cdots & [T(u_n)]_C \\ | & | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{m \times n}$$

$[T]_C^B$ נקראת **המטריצה המייצגת של ההעתקה T לפי הבסיסים B ו- C** .

הסבר

מחשבים את $T(u_i)$ התמונות של איברי הבסיס ב- U .
 - לאחר מכן מחשבים לכל אחד מהם את וקטור הקואורדינטות שלו ביחס ל- C .

טענה 9.5.

יהיו U ו- V מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים B ו- C כמו קודם. תהי $T: U \rightarrow V$ ה"ל. אזי לכל $u \in U$:

$$[T(u)]_C = [T]_C^B \cdot [u]_B$$

זה יכול לעזור לנו: נחשב פעם אחת את המטריצה המייצגת לפי שני הבסיסים, ולאחר מכן עבור כל וק' חדש שנקבל, נוכל לחשב בזריזות את וקטור הקואורדינטות שלו ב- C .

נגדיר את המרחב הווקטורי

$$V = M_3(\mathbb{R})$$

של כל המטריצות 3×3 מעל $\mathbb{R}$.
נגדיר העתקה ליניארית $T: V \rightarrow V$ על ידי

$$T(A) = A - A^T.$$

נסמן

$$U = \{A \in V \mid A = A^T\}, \quad W = \{A \in V \mid A = -A^T\}.$$

1. הוכיחו כי T היא העתקה ליניארית.
2. מצאו את $\ker T$ ואת $\operatorname{Im} T$.
3. הוכיחו כי $\ker T = U$ וכי $\operatorname{Im} T = W$.
4. חשבו את $\dim U$ ואת $\dim W$ באמצעות משפט המימד.
5. מצאו את מטריצת הייצוג של T ביחס לבסיס המתקבל מאיחוד של בסיס ל- U ובסיס ל- W .

פתרון

1. לכל $A, B \in V$ ולכל $\lambda \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$T(A + B) = (A + B) - (A + B)^T = (A - A^T) + (B - B^T) = T(A) + T(B),$$

וכן

$$T(\lambda A) = \lambda A - (\lambda A)^T = \lambda(A - A^T) = \lambda T(A),$$

ולכן T ליניארית.

2. נתחיל בגרעין:

$$A \in \ker T \iff T(A) = 0 \iff A - A^T = 0 \iff A = A^T.$$

לכן

$$\ker T = U.$$

נעבור לתמונה. לכל $A \in V$ מתקיים

$$T(A) = A - A^T,$$

ונבדוק:

$$(T(A))^T = (A - A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T) = -T(A).$$

לכן $T(A) \in W$, ומכאן

$$\operatorname{Im} T \subseteq W.$$

מאידך, אם $B \in W$ אז $B = -B^T$. נגדיר $A = \frac{1}{2}B$. אז

$$T(A) = \frac{1}{2}(B - B^T) = \frac{1}{2}(B - (-B)) = B,$$

ולכן $B \in \text{Im } T$ ומתקבל

$$\text{Im } T = W.$$

3. כבר הראינו כי

$$\ker T = U, \quad \text{Im } T = W.$$

4. נשתמש במשפט המימד. ידוע כי

$$\dim V = \dim M_3(\mathbb{R}) = 9.$$

לפי משפט המימד:

$$\dim V = \dim \ker T + \dim \text{Im } T = \dim U + \dim W.$$

נחשב ישירות את $\dim U$. מטריצה סימטרית 3×3 נקבעת על ידי: שלושה איברים אלכסוניים ועוד שלושה איברים מעל האלכסון, ולכן

$$\dim U = 6.$$

מכאן

$$\dim W = 9 - 6 = 3.$$

5. נבחר בסיס ל- U המורכב מהמטריצות:

$$E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, E_{23} + E_{32},$$

ובסיס ל- W המורכב מהמטריצות:

$$E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32}.$$

נגדיר בסיס מסודר

$$B = (U \text{ בסיס ל-}, W \text{ בסיס ל-}).$$

מאחר שלכל $A \in U$ מתקיים $T(A) = 0$, ולכל $B \in W$ מתקיים $T(B) = 2B$, נקבל כי מטריצת הייצוג של T ביחס ל- B היא

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0_{6 \times 6} & 0 \\ 0 & 2I_3 \end{pmatrix}.$$

כלומר, T מאפסת את רכיב U ומכפילה פי 2 את רכיב W , וזוהי הצורה המייצגת של T ביחס לפירוק

$$V = U \oplus W.$$

נגדיר $V = \mathbb{R}^3$ עם הבסיס הסטנדרטי $E = (e_1, e_2, e_3)$. תהי $T : V \rightarrow V$ העתקה ליניארית שמטריצת הייצוג שלה ביחס ל- E היא

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. הוכיחו שקיים וקטור לא אפס $v \in V$ כך ש- $T(v) = 0$.
2. הוכיחו שקיים וקטור לא אפס $u \in V$ כך ש- $T(u) = 3u$.
3. מצאו וקטור $w \in V$ כך ש- $T(w) = w + u$ (כאשר u הוא הווקטור שמצאתם בסעיף 2).

פתרון

נסמן $A = [T]_E$.

1. העמודה הראשונה של A היא הקואורדינטות של $T(e_1)$ ביחס ל- E . כאן העמודה הראשונה היא וקטור האפס, לכן

$$T(e_1) = 0.$$

נבחר $v = e_1 \neq 0$, ואז $T(v) = 0$.

2. העמודה השלישית של A היא הקואורדינטות של $T(e_3)$ ביחס ל- E . כאן

$$T(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = e_1 - e_2 + 3e_3.$$

נרצה וקטור $u = (x, y, z)$ כך ש- $T(u) = 3u$. נחשב בעזרת A :

$$T(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z \\ 2y - z \\ 3z \end{pmatrix}.$$

נדרוש

$$\begin{pmatrix} y + z \\ 2y - z \\ 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}.$$

מהשורה השלישית מתקבל תמיד $3z = 3z$. מהשורה השנייה: $-z = y \iff 2y - z = 3y$. מהשורה הראשונה: $y + z = 3x$ אך $y = -z$, לכן $0 = 3x \Rightarrow x = 0$. נבחר $z = 1$, ואז $y = -1$ ולכן

$$u = (0, -1, 1) \neq 0, \quad T(u) = 3u.$$

3. מסעיף 2 יש לנו $u = (0, -1, 1)$. נרצה $w = (x, y, z)$ כך ש- $T(w) = w + u$. כמו קודם,

$$T(w) = \begin{pmatrix} y + z \\ 2y - z \\ 3z \end{pmatrix}, \quad w + u = \begin{pmatrix} x \\ y - 1 \\ z + 1 \end{pmatrix}.$$

נפתור את המערכת

$$\begin{cases} y + z = x, \\ 2y - z = y - 1, \\ 3z = z + 1. \end{cases}$$

מהשלישית: $z = \frac{1}{2} \iff 2z = 1 \iff 3z = z + 1$. מהשנייה: $y = -\frac{1}{2} \iff 2y - z = y - 1$. מהראשונה: $x = y + z = 0$. לכן אפשר לבחור

$$w = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \text{ואז} \quad T(w) = w + u.$$

נגדיר $V = \mathbb{C}[x]$ מרחב כל הפולינומים.
נגדיר אופרטור ליניארי $N : V \rightarrow V$ על ידי

$$(Np)(x) := -(58 - x)p'(x).$$

ולכל $\theta \in \mathbb{R}$ נגדיר העתקה $U_\theta : V \rightarrow V$ על ידי

$$U_\theta := \exp(-i\theta N^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\theta)^k}{k!} N^{2k}.$$

נשתמש בשני בסיסים:

$$E = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}, \quad B = \{58, (58 - x), (58 - x)^2, (58 - x)^3, \dots\}.$$

1. הראו ש- N ליניארי, וש- U_θ ליניארי.
2. לכל $n \geq 1$ נסמן $b_n(x) := (58 - x)^n$ וגם $b_0(x) := 58$. חשבו את $N(b_n)$ ואת $N^2(b_n)$.
3. חשבו את $U_\theta(b_n)$ לכל $n \geq 0$, והסיקו את צורת המטריצה המייצגת $[U_\theta]_B$.
4. חשבו את המטריצה המייצגת של U_θ על תת-המרחב $P_3 = \text{span}\{1, x, x^2, x^3\}$ ביחס ל- $E_3 = \{1, x, x^2, x^3\}$.

פתרון

1. ליניאריות של N נובעת מליניאריות הנגזרת:

$$N(\alpha p + \beta r) = -(58 - x)(\alpha p' + \beta r') = \alpha N(p) + \beta N(r).$$

כדי להצדיק את הטור, נקבע פולינום ממעלה לכל היותר d . המרחב P_d של הפולינומים ממעלה לכל היותר d נשמר על ידי N , ולכן הטור המגדיר את U_θ הוא שם טור אקספוננט של מטריצה סופית, המתכנס לכל θ . הגדרות אלה עקביות כאשר מגדילים את d , ולכן הן מגדירות העתקה על $\mathbb{C}[x]$. הליניאריות נובעת מן הליניאריות של סכומי הטור ומהעברת הגבול בכל קואורדינטה.

2. לכל $n \geq 1$:

$$b'_n(x) = \frac{d}{dx}(58 - x)^n = n(58 - x)^{n-1} \cdot (-1) = -n(58 - x)^{n-1}.$$

ולכן

$$N(b_n) = -(58 - x)b'_n(x) = -(58 - x)(-n(58 - x)^{n-1}) = n(58 - x)^n = nb_n.$$

מכאן

$$N^2(b_n) = N(nb_n) = nN(b_n) = n \cdot nb_n = n^2 b_n.$$

$$N^2(b_0) = 0 \text{ ולכן } N(b_0) = N(58) = 0 \text{ בנוסף}$$

3. מאחר שלכל $n \geq 1$ מתקיים $N^{2k}(b_n) = n^{2k} b_n$, נקבל מהטור:

$$U_\theta(b_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\theta)^k}{k!} n^{2k} b_n = \exp(-i\theta n^2) b_n.$$

ובמקרה $n = 0$ מתקבל $U_\theta(b_0) = b_0$

לכן במטריצה המייצגת לפי B מתקבל אלכסון:

$$[U_\theta]_B = \text{diag}(1, e^{-i\theta}, e^{-i4\theta}, e^{-i9\theta}, \dots).$$

4. נסמן $q_9 := e^{-i9\theta}$, $q_4 := e^{-i4\theta}$, $q_1 := e^{-i\theta}$. על P_3 מספיק לעבוד עם $\{b_0, b_1, b_2, b_3\}$, ושם $U_\theta(b_3) = q_9 b_3$, $U_\theta(b_2) = q_4 b_2$, $U_\theta(b_1) = q_1 b_1$, $U_\theta(b_0) = b_0$.
נפתח את b_0, b_1, b_2, b_3 לפי E_3 :

$$b_0 = 58, \quad b_1 = 58 - x, \quad b_2 = (58 - x)^2 = x^2 - 116x + 3364,$$

$$b_3 = (58 - x)^3 = -x^3 + 174x^2 - 10092x + 195112.$$

נסמן ב- C את המטריצה שעמודותיה הן הקואורדינטות של b_0, b_1, b_2, b_3 בבסיס E_3 :

$$C = \begin{pmatrix} 58 & 58 & 3364 & 195112 \\ 0 & -1 & -116 & -10092 \\ 0 & 0 & 1 & 174 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

זוהי מטריצה הפיכה, והנוסחה $[U_\theta]_{E_3} = C \operatorname{diag}(1, q_1, q_4, q_9) C^{-1}$ נותנת את המטריצה הבאה:

$$[U_\theta]_{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 58(1 - q_1) & 3364(1 - 2q_1 + q_4) & 195112(1 - 3q_1 + 3q_4 - q_9) \\ 0 & q_1 & 116(q_1 - q_4) & 10092(q_1 - 2q_4 + q_9) \\ 0 & 0 & q_4 & 174(q_4 - q_9) \\ 0 & 0 & 0 & q_9 \end{pmatrix}.$$

תהי ההעתקה $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T((x, y, z)^T) = (2x - y + z, x + 3z)^T.$$

חשבו את מטריצת הייצוג ביחס לבסיסים הסטנדרטיים באמצעות תמונות שלושת וקטורי הבסיס.

פתרון

מציבים כל וקטור בסיס בנפרד:

$$T(e_1) = (2 \cdot 1 - 0 + 0, 1 + 3 \cdot 0)^T = (2, 1)^T,$$

$$T(e_2) = (2 \cdot 0 - 1 + 0, 0 + 3 \cdot 0)^T = (-1, 0)^T,$$

$$T(e_3) = (2 \cdot 0 - 0 + 1, 0 + 3 \cdot 1)^T = (1, 3)^T.$$

תמונות אלה, לפי הסדר, הן עמודות המטריצה:

$$[T]_{E_2}^{E_3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

בדיקה על וקטור כללי: כפל שורה בעמודה נותן $(2x - y + z, x + 3z)^T$, בדיוק כנוסחת ההעתקה.

תהי $T: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$ "ל הנתונה על ידי $T(P(X)) = \begin{pmatrix} P(1) \\ P(2) \end{pmatrix}$ לכל $P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$.

יהיו $B = \{1, 1 + X, 1 + X + X^2\}$ ו- $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיסים של $\mathbb{R}_2[X]$ ו- $\mathbb{R}^2$ בהתאמה.

א. מצאו את $[T]_C^B$. ב. (בבית!) וודאו כי השוויון מהמשפט הקודם מתקיים (כלומר $[T(u)]_C = [T]_C^B [u]_B$).

פתרון

מההגדרה של $[T]_C^B$, נרצה לחשב את $[T(1)]_C$, $[T(1+X)]_C$, $[T(1+X+X^2)]_C$:

$$[T(1)]_C = \left[\begin{pmatrix} P(1) = 1 \\ P(2) = 1 \end{pmatrix} \right]_C = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_C = \left[1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T(1+X)]_C = \left[\begin{pmatrix} P(1) = 2 \\ P(2) = 3 \end{pmatrix} \right]_C = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_C = \left[2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[T(1+X+X^2)]_C = \left[\begin{pmatrix} P(1) = 3 \\ P(2) = 7 \end{pmatrix} \right]_C = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right]_C = \left[3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_C = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ אנו מסיקים כי}$$

ב.בדקו בבית ! בשביל להראות ש- $[T(u)]_C = [T]_C^B[u]_B$, ניקח וקטור כללי ב- $\mathbb{R}_2[X]$ $P(X) = aX^2 + bX + c$ ונראה שהשוויון מתקיים עבורו.

תחילה נחשב את אנף שמאל:

$$[T(P(X))]_C = \left[\begin{pmatrix} P(1) = a+b+c \\ P(2) = 4a+2b+c \end{pmatrix} \right]_C = \left[(a+b+c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (3a+b) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_C = \begin{pmatrix} a+b+c \\ 3a+b \end{pmatrix}$$

על מנת לחשב את אנף ימין, נחשב תחילה את הקואורדינטות של $P(X)$ ביחס ל- B . כלומר, צריך למצוא $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ כך ש-

$$aX^2 + bX + c = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot (1+X) + \alpha_3 \cdot (1+X+X^2)$$

נבנה מערכת משוואות, נרשום למטריצה, נדרג ונקבל: $\alpha_1 = c - b, \alpha_2 = b - a, \alpha_3 = a$

$$[P(X)]_B = \begin{pmatrix} c-b \\ b-a \\ a \end{pmatrix} \text{ ולכן:}$$

נשתמש בתוצאה מסעיף א, ונחשב את המכפלה, ונראה שהיא שווה לתוצאה שחישבנו באנף שמאל:

$$[T]_C^B[P(X)]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c-b \\ b-a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-b+2(b-a)+3a \\ b-a+4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ 3a+b \end{pmatrix}$$

9.3.1 מטריצת מעבר בין בסיסים

תזכורת (מההרצאה)

הגדרה: יהיו V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$, ו- B ו- B' שני בסיסים סדורים של V .
מטריצת המעבר $[I_V]_B^{B'}$ מהבסיס B' לבסיס B היא המטריצה המייצגת $[T]_B^{B'}$ כאשר $T: V \rightarrow V$ היא העתקת הזהות: $T(v) = v$ לכל $v \in V$.

$$[v]_B = [I_V]_B^{B'}[v]_{B'}$$

$$I_V(v) = v \text{ לעיתים מסמנים את העתקת הזהות}$$

• בסה"כ זה די פשוט: נחשב את וקטורי הקואורדינטות של הווקטורים ב- B' ביחס לבסיס B .

במרחב $V = \mathbb{R}_1[X]$ נתונים שני בסיסים סדורים

$$B = (1 + X, 1 + 2X), \quad B' = (2 + 3X, 3 + 5X).$$

חשבו את מטריצת המעבר $[I_V]_B^{B'}$ מ- B' ל- B . עבור $p(X) = a + bX$ אמתו במפורש את הזהות $[p]_B = [I_V]_B^{B'} [p]_{B'}$.

פתרון

מטריצות העמודות בבסיס הסטנדרטי $(1, X)$ הן

$$M_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

שתיהן בעלות דטרמיננטה 1. העמודה הראשונה של מטריצת המעבר מתקבלת מ- $2 + 3X = (1 + X) + (1 + 2X)$, והשנייה מ- $3 + 5X = (1 + X) + 2(1 + 2X)$. לכן

$$P = [I_V]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

לבדיקה עבור פולינום כללי נפתור בשני הבסיסים:

$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha + 2\beta = b \quad \Rightarrow \quad [p]_B = (2a - b, b - a)^T,$$

$$2\gamma + 3\delta = a, \quad 3\gamma + 5\delta = b \quad \Rightarrow \quad [p]_{B'} = (5a - 3b, -3a + 2b)^T.$$

עתה נחשב את שני רכיבי המכפלה:

$$P[p]_{B'} = \begin{pmatrix} (5a - 3b) + (-3a + 2b) \\ (5a - 3b) + 2(-3a + 2b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - b \\ b - a \end{pmatrix} = [p]_B.$$

כך אומת גם כיוון המעבר: הקואורדינטות ב- B' הן הקלט והקואורדינטות ב- B הן הפלט.

9.3.2 מטריצה מייצגת של הרכבת העתקות ושל הופכית של העתקה

טענה 9.12.

: יהיו U, V ו- W מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים A, B ו- C בהתאמה. תהיינה $S: U \rightarrow V$ ו- $T: V \rightarrow W$ שתי העתקות לינאריות. אז

$$[T \circ S]_C^A = [T]_C^B [S]_B^A$$

מסקנה

אם $T: V \rightarrow W$ איזומורפיזם (=העתקה לינארית הפיכה) ו- $B \subseteq V, C \subseteq W$ בסיסים בהתאמה, אז:

$$[T^{-1}]_B^C = ([T]_C^B)^{-1}$$

9.4 דמיון מטריצות

תזכורת (מההרצאה)

מטריצות $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ נקראות דומות אם קיימת מטריצה הפיכה $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש:

$$A = P^{-1}BP$$

אם A, B דומות מתקיים:

1. $\det(A) = \det(B)$
2. $\text{trace}(A) = \text{trace}(B)$
3. $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$

יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכיחו או הפריכו:

1. אם A, B דומות, אז A^k, B^k דומות לכל מספר שלם $k \geq 1$.
2. אם A^k, B^k דומות עבור מספר שלם כלשהו $k \geq 1$, אז A, B דומות.

פתרון

1. אם $B = P^{-1}AP$ עם P הפיכה, אז הביטולים $PP^{-1} = I$ נותנים

$$B^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP.$$

לכן החזקות דומות באמצעות אותה מטריצה P .

2. הטענה שגויה. מעל כל שדה נבחר

$$A = 0_{2 \times 2}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

מתקיים $A^2 = B^2 = 0$, אך A, B אינן דומות, מפני ש- $P^{-1}AP = 0$ לכל P הפיכה ואילו $B \neq 0$. מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ גם הדוגמה המקורית $A = -I_2, B = I_2$ תקפה: ריבועיהן שווים, ומטריצה סקלרית דומה רק לעצמה. דוגמה זו אינה מפריכה דבר בשדה ממאפיין 2, שבו $-I_2 = I_2$.

מלכודת נפוצה: מן השוויון $A^k = (Q^{-1}BQ)^k$ אי אפשר להסיק $A = Q^{-1}BQ$. פונקציית החזקה על מטריצות אינה חד־חד־ערכית, כפי שהדוגמאות מראות.

מערכת מישורית מתארת וקטור כוח $v = (x, y)^T$ באמצעות שתי קריאות חיישנים:

$$T(v) = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

במרחב הקלט נשתמש בבסיס $B = ((1, 1)^T, (1, -1)^T)$, ובפלט בבסיס הסטנדרטי E . מצאו את $[T]_E^B$, שחזרו את v מתוך $T(v) = (6, 2)^T$, ובדקו את התוצאה בשתי מערכות הקואורדינטות.

פתרון

עמודות המטריצה הן תמונות איברי הבסיס:

$$T(1, 1)^T = (2, 0)^T, \quad T(1, -1)^T = (0, 2)^T, \quad [T]_E^B = 2I_2.$$

לכן אם $[v]_B = (a, b)^T$, אז $(6, 2)^T = 2(a, b)^T$, ומתקבל $a = 3, b = 1$. מכאן

$$v = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

בדיקה בקואורדינטות הסטנדרטיות נותנת $T(4, 2)^T = (4 + 2, 4 - 2)^T = (6, 2)^T$. בבסיס B , אותה פעולה מיוצגת במטריצה האלכסונית $2I_2$; בחירת בסיס מתאים הפכה את שני ערוצי המדידה לבלתי מעורבים.

תרגיל ממבחן

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

1. לא קיימים שדות $\mathbb{F}_1 \subseteq \mathbb{F}_2$ ומרחב וקטורי V מעל $\mathbb{F}_2$, הנחשב גם למרחב מעל $\mathbb{F}_1$ באמצעות צמצום הסקלרים, כך ש-

$$\dim_{\mathbb{F}_1} V = 2 \dim_{\mathbb{F}_2} V.$$

2. אם $A \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה, אז לכל $B \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$ מתקיים

$$N(AB) = N(B).$$

3. יהי $n \geq 1$. לכל מספר שלם k המקיים $0 \leq k \leq n^2$ קיימת מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ שעבורה $\text{tr}(A) = k$ וגם A דומה רק לעצמה.

פתרון

1. הטענה שגויה. ניקח $\mathbb{F}_1 = \mathbb{R}, \mathbb{F}_2 = \mathbb{C}$ ו- $V = \mathbb{C}$. מעל $\mathbb{C}$ הבסיס (1) נותן

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1.$$

מעל $\mathbb{R}$ הבסיס $(1, i)$ נותן

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2 = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}.$$

כאן אותו אוסף וקטורים מקבל ממדים שונים, משום שהשדה שממנו מותר לבחור מקדמים השתנה.

2. הטענה נכונה. נוכיח את שתי ההכלות. אם $x \in N(B)$, אז $Bx = 0$, ולכן

$$ABx = A(Bx) = A0 = 0.$$

מכאן $x \in N(AB)$, כלומר $N(B) \subseteq N(AB)$. בכיוון ההפוך, אם $x \in N(AB)$, אז $ABx = 0$ נכפול משמאל ב- A^{-1} ונקבל

$$Bx = (A^{-1}A)Bx = A^{-1}0 = 0.$$

לכן $x \in N(B)$, כלומר $N(AB) \subseteq N(B)$, ושתי ההכלות נותנות את השוויון המבוקש.

3. הטענה נכונה. נגדיר

$$A = \frac{k}{n} I_n.$$

מאחר ש- $n \geq 1$ והעבודה מעל $\mathbb{R}$, המנה מוגדרת, ומתקיים

$$\text{tr}(A) = \sum_{j=1}^n \frac{k}{n} = n \frac{k}{n} = k.$$

לכל מטריצה הפיכה $P \in M_n(\mathbb{R})$ מתקיים

$$P^{-1}AP = P^{-1} \left(\frac{k}{n} I_n \right) P = \frac{k}{n} P^{-1}P = \frac{k}{n} I_n = A.$$

לכן כל מטריצה הדומה ל- A שווה ל- A . למעשה הבנייה תקפה לכל $k \in \mathbb{R}$, ובפרט לכל הערכים שבטענה.

נוצר על ידי חן גדי

תרגול 10: דמיון מטריצות ודטרמיננטות

עיקרון מנחה

בסיום התרגול תוכלו לבחור שיטת חישוב יעילה לדטרמיננטה, לעקוב אחר השפעת פעולות שורה, לזהות תנאים להפיכות ולקשר בין מבנה אלגברי, שינוי בסיס ושינוי שטח.

10.1 דמיון מטריצות

תזכורת (מההרצאה)

מטריצות $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ נקראות דומות אם קיימת מטריצה הפיכה $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש:

$$A = P^{-1}BP$$

אם A, B דומות מתקיים:

- $\det(A) = \det(B)$
- $\text{trace}(A) = \text{trace}(B)$
- $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$

יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכיחו או הפריכו:

- אם A, B דומות, אז A^k, B^k דומות לכל מספר שלם $k \geq 1$.
- אם A^k, B^k דומות עבור מספר שלם כלשהו $k \geq 1$, אז A, B דומות.

פתרון

1. אם $B = P^{-1}AP$ עם P הפיכה, אז הביטולים $PP^{-1} = I$ נותנים

$$B^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP.$$

לכן החזקות דומות באמצעות אותה מטריצה P .

2. הטענה שגויה. מעל כל שדה נבחר

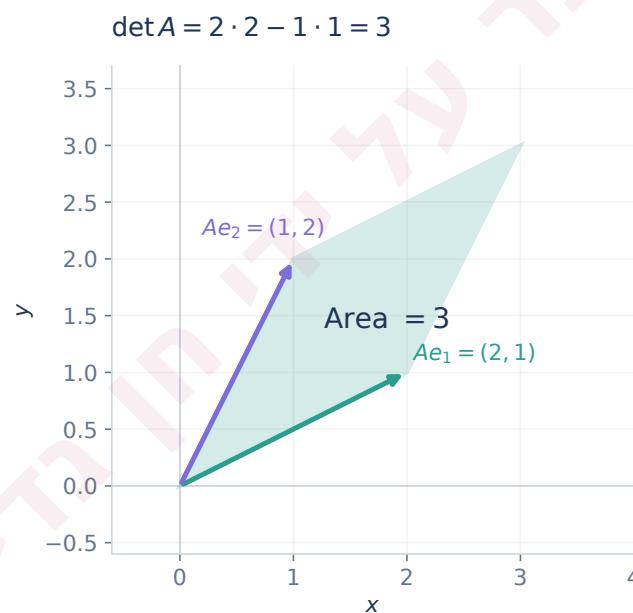
$$A = 0_{2 \times 2}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

מתקיים $A^2 = B^2 = 0$, אך A, B אינן דומות, מפני ש- $P^{-1}AP = 0$ לכל P הפיכה ואילו $B \neq 0$. מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ גם הדוגמה המקורית $A = -I_2, B = I_2$ תקפה: ריבועיהן שווים, ומטריצה סקלרית דומה רק לעצמה. דוגמה זו אינה מפריכה דבר בשדה ממאפיין 2, שבו $-I_2 = I_2$.

מלכודת נפוצה: מן השוויון $A^k = (Q^{-1}BQ)^k$ אי אפשר להסיק $A = Q^{-1}BQ$. פונקציית החזקה על מטריצות אינה חד־חד־ערכית, כפי שהדוגמאות מראות.

10.2 דטרמיננטה

הדטרמיננטה מוגדרת למטריצה ריבועית. במישור, הערך המוחלט שלה הוא גורם שינוי השטח; הסימן מצוין אם האוריינטציה נשמרת או מתהפכת.



העתקה לינארית מעבירה ריבוע יחידה למקבילית. שטח המקבילית הוא הערך המוחלט של הדטרמיננטה.

הגדרה פורמלית

יהי $n \in \mathbb{N}$. פונקציה

$$\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

נקראת **דטרמיננטה** (determinant), אם לכל $A \in M_n(\mathbb{R})$ מתקיימות התכונות הבאות:

1. **החלפת שורות (שינוי סימן):** לכל $1 \leq i < j \leq n$, אם $E_{i,j}^{(1)} \in M_n(\mathbb{R})$ היא המטריצה האלמנטרית המחליפה את השורות i ו- j , אז

$$\det(E_{i,j}^{(1)} A) = -\det(A).$$

2. **כפל שורה בסקלר (הומוגניות):** לכל $1 \leq i \leq n$ ולכל $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, אם $E_{i,\lambda}^{(2)} \in M_n(\mathbb{R})$ היא המטריצה האלמנטרית המכפילה את השורה ה- i ב- λ , אז

$$\det(E_{i,\lambda}^{(2)} A) = \lambda \det(A).$$

3. **הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת (אינווריאנטיות):** לכל $1 \leq i \neq j \leq n$ ולכל $\lambda \in \mathbb{R}$, אם $E_{i,j,\lambda}^{(3)} \in M_n(\mathbb{R})$ היא המטריצה האלמנטרית המבצעת $R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$, אז

$$\det(E_{i,j,\lambda}^{(3)} A) = \det(A).$$

4. **“נרמול הפונקציה”:**

$$\det(I_n) = 1.$$

תזכורת (מההרצאה)

שתי תכונות יסוד שימושיות:

• אם $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ היא מטריצה משולשית עליונה, כלומר $a_{ij} = 0$ לכל $i > j$, אז

$$\det(A) = \prod_{k=1}^n a_{kk}.$$

• אם קיימים $i \neq j$ כך שהשורה ה- i שווה לשורה ה- j , או אם קיימת שורת אפסים ב- A , אז $\det(A) = 0$. באופן אנלוגי, אם קיימות שתי עמודות זהות או עמודת אפסים, אז $\det(A) = 0$.

חשבו את הדטרמיננטות באמצעות פעולות שורה, תוך ציון השפעת כל פעולה על הדטרמיננטה.

1. עבור $t \in \mathbb{R}$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & t & 7 \end{pmatrix}.$$

2.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

פתרון

1. נסיף לשורה הרביעית כפולות של שורות אחרות; פעולות אלה אינן משנות דטרמיננטה:

$$A(t) \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & t & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & t+2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - (t+2)R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6-2t \end{pmatrix}.$$

מכפלת איברי האלכסון נותנת $\det A(t) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (6 - 2t) = 6 - 2t$.

2. שורות B מקיימות $r_3 = r_1 - 2r_2$. לכן שתי הפעולות $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$ ו- $R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2$ יוצרות שורת אפסים בלי לשנות דטרמיננטה. למטריצה עם שורת אפסים דטרמיננטה אפס, ולכן $\det B = 0$.

תזכורת (מההרצאה)

תכונות יסוד (מההרצאה):

• **כפליות:** לכל $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ מתקיים

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

• **אי חיבוריות (באופן כללי):** באופן כללי אין שוויון

$$\det(A + B) = \det(A) + \det(B).$$

• **אינווריאנטיות לשחלוף:** לכל $A \in M_n(\mathbb{R})$ מתקיים

$$\det(A^T) = \det(A).$$

• **הומוגניות בסקלר:** לכל $c \in \mathbb{R}$ ולכל $A \in M_n(\mathbb{R})$ מתקיים

$$\det(cA) = c^n \det(A),$$

כאשר n הוא סדר המטריצה.

משפט מרכזי:

טענה 10.3.

לכל $A \in M_n(\mathbb{R})$ מתקיים: A הפיכה אם ורק אם $\det(A) \neq 0$.

תהייה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, כאשר A אינה הפיכה ו- B הפיכה. הוכיחו או הפריכו את הטענה שהמטריצה המוצגת בכל סעיף אינה הפיכה:

1. $A^T B$

2. $B^{-1} A B$

3. $A + A^2 + A^3 + A^4$

4. $(A + I)^2 - (A - I)^2$

$$5. (A+B)^2 + (A-B)^2.$$

פתרון

נשתמש בכך ש- $\det A = 0$, $\det B \neq 0$, ובכפוליות הדטרמיננטה.

$$1. \det(A^T B) = \det(A^T) \det B = \det A \det B = 0.$$

$$2. \det(B^{-1}AB) = \det(B^{-1}) \det A \det B = 0.$$

3. נוציא את A משמאל:

$$A + A^2 + A^3 + A^4 = A(I + A + A^2 + A^3),$$

ולכן הדטרמיננטה היא אפס.

$$4. \text{ מאחר ש-} AI = IA = A, \text{ נקבל}$$

$$(A+I)^2 - (A-I)^2 = (A^2 + 2A + I) - (A^2 - 2A + I) = 4A.$$

$$\text{לפיכך } \det(4A) = 4^n \det A = 0.$$

5. נפתח תוך שמירה על סדר הכפל:

$$(A+B)^2 + (A-B)^2 = (A^2 + AB + BA + B^2) + (A^2 - AB - BA + B^2) = 2(A^2 + B^2).$$

לפיכך הדטרמיננטה היא $2^n \det(A^2 + B^2)$, אך אין הכרח שתתאפס. דוגמה נגדית היא $A = 0, B = I_n$: המטריצה המתקבלת היא $2I_n$, שהיא הפיכה, ודטרמיננטתה $2^n \neq 0$.

10.2.1 נוסחת הדטרמיננטה

תזכורת (מההרצאה)

תהי $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה ריבועית מסדר n . לכל $1 \leq i, j \leq n$ נגדיר את **המטריצה המינורית** המתאימה לאיבר (i, j) , המסומנת M_{ij} , להיות המטריצה הריבועית מסדר $n-1$ המתקבלת מן A לאחר מחיקת השורה ה- i ומחיקת העמודה ה- j .

10.5. דוגמה

$$\text{תהי } A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ אז } M_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ ו- } M_{23} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

הגדרה פורמלית

תהי $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה ריבועית מסדר n . נגדיר את **הדטרמיננטה של A** , המסומנת $\det(A)$, באינדוקציה על n :

1. אם $n = 1$ אז $A = (a_{11})$ ומגדירים

$$\det(A) = a_{11}.$$

2. אם $n = 2$ אז

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

3. אם $n \geq 3$, אז לכל $1 \leq i \leq n$ מגדירים (פיתוח לפי השורה ה- i):

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det(M_{ij}),$$

כאשר M_{ij} היא המטריצה המינורית המתקבלת ממחיקת השורה ה- i והעמודה ה- j .
באופן שקול, לכל $1 \leq j \leq n$ ניתן להגדיר (פיתוח לפי העמודה ה- j):

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det(M_{ij}).$$

חשבו שוב את הדטרמיננטות, הפעם באמצעות פיתוח לפי מינורים ותכונות הנובעות ממנו.

1. עבור $t \in \mathbb{R}$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & t & 7 \end{pmatrix}.$$

2.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

פתרון

1. נפתח בעמודה הראשונה. שני האיברים שאינם אפס נמצאים במקומות $(1, 1)$ ו- $(4, 1)$, ולכן

$$\det A(t) = \det M_{11} - 2 \det M_{41}.$$

המינורים הם

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & t & 7 \end{pmatrix}, \quad M_{41} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

נפתח את הראשון לפי העמודה הראשונה ואת השני לפי השורה הראשונה:

$$\det M_{11} = (1 \cdot 7 - 2t) + (2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = 10 - 2t,$$

$$\det M_{41} = 1(2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) + (-1)(1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = 3 - 1 = 2.$$

לכן $\det A(t) = 10 - 2t - 2 \cdot 2 = 6 - 2t$, כפי שהתקבל בשיטה הקודמת.2. כתבו את הדטרמיננטה כפונקציה של השורות. מאחר ש- $r_3 = r_1 - 2r_2$, הלינאריות בשורה השלישית נותנת

$$\det(r_1, r_2, r_1 - 2r_2, r_4, r_5) = \det(r_1, r_2, r_1, r_4, r_5) - 2 \det(r_1, r_2, r_2, r_4, r_5) = 0.$$

בכל איבר יש שתי שורות זהות. הלינאריות וההתאפסות במקרה זה נובעות מפיתוח הדטרמיננטה, ולכן גם כאן $\det B = 0$.

מצאו באמצעות דטרמיננטה את כל ערכי $k \in \mathbb{R}$ שעבורם

$$A(k) = \begin{pmatrix} 2 & k & 4 \\ 3 & k+1 & 6 \\ -1 & -1 & k+1 \end{pmatrix}$$

אינה הפיכה.

פתרון

מטריצה ריבועית אינה הפיכה בדיוק כאשר הדטרמיננטה מתאפסת. נפתח בשורה הראשונה:

$$\begin{aligned} \det A(k) &= 2((k+1)^2 + 6) - k(3(k+1) + 6) \\ &\quad + 4(-3 + (k+1)) \\ &= 2k^2 + 4k + 14 - 3k^2 - 9k + 4k - 8 \\ &= -k^2 - k + 6 = -(k+3)(k-2). \end{aligned}$$

מכאן שהערכים המבוקשים הם $k = -3, 2$. בכל ערך אחר הדטרמיננטה שונה מאפס ולכן המטריצה הפיכה.

1. יהיו $n \geq 2$ ומספרים ממשיים (או מרוכבים) $x_1, \dots, x_n$. נגדיר את מטריצת וונדרמונדה

$$V(x_1, \dots, x_n) = (x_i^{j-1})_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

הוכיחו כי

$$\det(V(x_1, \dots, x_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

פתרון

1. נסמן

$$\Delta_n(x_1, \dots, x_n) = \det(V(x_1, \dots, x_n)).$$

נוכיח באינדוקציה על n כי

$$\Delta_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

בסיס האינדוקציה, $n = 2$:

$$\Delta_2(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1,$$

כנדרש.

צעד האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור $n-1$, ונוכיח עבור n . נתבונן ב- Δ_n כפולינום במשתנה x_n , כאשר $x_1, \dots, x_{n-1}$ קבועים. לפי פיתוח דטרמיננטה לפי השורה ה- n נקבל

$$\Delta_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_n^{j-1} (-1)^{n+j} \det(M_{nj}),$$

ולכן Δ_n הוא פולינום ב- x_n ממעלה לכל היותר $n-1$. האיבר היחיד שמכיל x_n^{n-1} מגיע מן האיבר בעמודה n , ולכן המקדם של x_n^{n-1} הוא

$$(-1)^{n+n} \det(M_{nn}) = \det(V(x_1, \dots, x_{n-1})) = \Delta_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

אם שניים מן המספרים $x_1, \dots, x_{n-1}$ שווים, יש שתי שורות זהות, ושני אגפי הנוסחה המבוקשת הם אפס. לכן אפשר להניח מכאן ואילך שמספרים אלה שונים בזוגות. כעת, לכל $k \in \{1, \dots, n-1\}$, אם מציבים $x_n = x_k$ אז שתי שורות במטריצה V נעשות זהות (השורה ה- k והשורה ה- n), ולכן

$$\Delta_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_k) = 0.$$

מכאן שלכל $k = 1, \dots, n-1$ מתקבל ש- $(x_n - x_k)$ מחלק את הפולינום Δ_n (במשתנה x_n). לכן קיים פולינום P כך ש

$$\Delta_n(x_1, \dots, x_n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} (x_n - x_k) \right) P(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

כאשר P אינו תלוי ב- x_n .

נשווה מקדמים של x_n^{n-1} בשני האגפים. באגף שמאל המקדם הוא $\Delta_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$, ובאגף ימין המקדם של x_n^{n-1} במכפלה $\prod_{k=1}^{n-1} (x_n - x_k)$ הוא 1, ולכן

$$P(x_1, \dots, x_{n-1}) = \Delta_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

מכאן

$$\Delta_n(x_1, \dots, x_n) = \Delta_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1} (x_n - x_k).$$

לבסוף, לפי הנחת האינדוקציה,

$$\Delta_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i),$$

ולכן

$$\Delta_n(x_1, \dots, x_n) = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i) \right) \left(\prod_{k=1}^{n-1} (x_n - x_k) \right) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

הנוסחה הוכחה.

1. יהי $n \geq 2$ ויהי $w \in \mathbb{C}$ שורש יחידה פרימיטיבי מסדר n , כלומר $w^n = 1$ ולכל $1 \leq k \leq n-1$ מתקיים $w^k \neq 1$. נגדיר את המטריצה

$$F = (w^{(i-1)(j-1)})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{C}).$$

חשבו את $\det(F)$ בצורה מפורשת.

2. יהי $n \geq 3$, יהי $1 \leq p \leq n-1$ ונסמן $q = n-p$. לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ נגדיר מטריצה $A(\alpha, \beta) \in M_n(\mathbb{R})$ כך:

$$a_{ii} = 1 \quad (1 \leq i \leq n),$$

ולכל $i \neq j$

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha, & 1 \leq i, j \leq p \text{ או } p+1 \leq i, j \leq n, \\ \beta, & \text{אחרת.} \end{cases}$$

תהי ההעתקה הלינארית $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ המוגדרת על ידי $T(v) = A(\alpha, \beta)v$. מצאו עבור אילו ערכי α, β ההעתקה T היא איזומורפיזם, וחישוב את $\det(A(\alpha, \beta))$.

פתרון

תחילה נציג את מבנה המטריצות:

$$F = (w^{(i-1)(j-1)})_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \cdots & w^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

$$A(\alpha, \beta) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right),$$

גודלי הבלוקים הם

$$\begin{aligned} A_{11} &\in M_p(\mathbb{R}), & A_{22} &\in M_q(\mathbb{R}), \\ A_{12} &\in M_{p \times q}(\mathbb{R}), & A_{21} &\in M_{q \times p}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 & \cdots & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \alpha & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{p \times p}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 & \cdots & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \alpha & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{q \times q}.$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta & \beta & \cdots & \beta \end{pmatrix}_{p \times q}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta & \beta & \cdots & \beta \end{pmatrix}_{q \times p}.$$

$$P^{-1}A(\alpha, \beta)P = (1 - \alpha)I_{n-2} \oplus B = \left(\begin{array}{c|c} (1 - \alpha)I_{n-2} & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right),$$

כאשר הבלוק התחתון-ימני הוא מטריצה מסדר 2:

$$B = \begin{pmatrix} 1 + (p-1)\alpha & q\beta \\ p\beta & 1 + (q-1)\alpha \end{pmatrix}.$$

1. עובדה שבה נשתמש (דטרמיננט וונדרמונדה). לכל $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ נגדיר

$$V(x_1, \dots, x_n) = (x_i^{j-1})_{i,j=1}^n.$$

אז מתקיים

$$\det(V(x_1, \dots, x_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

נגדיר

$$x_i = w^{i-1} \quad (i = 1, \dots, n).$$

אז לכל i, j מתקיים

$$F_{ij} = w^{(i-1)(j-1)} = (w^{i-1})^{j-1} = x_i^{j-1}.$$

לכן

$$F = V(x_1, \dots, x_n).$$

על פי התרגיל הקודם על וונדרמונדה,

$$\det(F) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (w^j - w^i).$$

לכל $0 \leq i < j \leq n-1$ מתקיים

$$w^j - w^i = w^i(w^{j-i} - 1),$$

ולכן

$$\det(F) = \left(\prod_{0 \leq i < j \leq n-1} w^i \right) \left(\prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (w^{j-i} - 1) \right).$$

נסמן

$$S = \sum_{0 \leq i < j \leq n-1} i.$$

אז

$$\prod_{0 \leq i < j \leq n-1} w^i = w^S.$$

כעת נחשב את S : לכל $i \in \{0, \dots, n-2\}$ יש בדיוק $(n-1-i)$ ערכים של j כך ש- $i < j \leq n-1$, ולכן

$$S = \sum_{i=0}^{n-2} i(n-1-i) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

מכאן

$$\prod_{0 \leq i < j \leq n-1} w^i = w^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}.$$

בנוסף, נאחד גורמים לפי $\{1, \dots, n-1\}$. עבור כל m יש בדיוק $(n-m)$ זוגות (i, j) עם $j-i = m$, ולכן

$$\prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (w^{j-i} - 1) = \prod_{m=1}^{n-1} (w^m - 1)^{n-m}.$$

לכן

$$\det(F) = w^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \prod_{m=1}^{n-1} (w^m - 1)^{n-m}.$$

מאחר ש- w שורש יחידה פרימיטיבי מסדר n , מתקיים לכל $1 \leq m \leq n-1$ כי $w^m \neq 1$, ולכן $w^m - 1 \neq 0$. מכאן שכל גורם במכפלה אינו אפס, ולכן $\det(F) \neq 0$.

2. משפטים שבהם נשתמש (מהכיתה).

(א) קשר בין איזומורפיזם למטריצה מייצגת. יהי V מרחב וקטורי מממד סופי מעל $\mathbb{R}$, יהי $T: V \rightarrow V$ לינארית, ויהי $[T]_{\mathcal{B}}$ המטריצה המייצגת של T בבסיס $\mathcal{B}$. אז

$$T \text{ איזומורפיזם} \iff [T]_{\mathcal{B}} \text{ הפיכה}.$$

(ב) קשר בין הפיכות לדטרמיננטה. לכל $A \in M_n(\mathbb{R})$ מתקיים

$$A \text{ הפיכה} \iff \det(A) \neq 0.$$

(זהו המשפט הסטנדרטי על דטרמיננטה והפיכות.)

(ג) אי־תלות הדטרמיננטה בבחירת הבסיס. אם P הפיכה אז

$$\det(P^{-1}AP) = \det(A),$$

משום ש

$$\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) = \det(A).$$

מכאן ניגש לפתרון.

נסמן $A = A(\alpha, \beta)$. נגדיר

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_{p+1} = \cdots = x_n = 0, \sum_{i=1}^p x_i = 0 \right\},$$

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_1 = \cdots = x_p = 0, \sum_{i=p+1}^n x_i = 0 \right\}.$$

ברור כי U, W תתי מרחבים, משום שהם מוגדרים על ידי מערכת משוואות לינאריות הומוגניות בקואורדינטות.

כעת נוכיח כי לכל $x \in U$ מתקיים $Ax = (1 - \alpha)x$. יהי $x \in U$. אז $x_{p+1} = \cdots = x_n = 0$ וגם $\sum_{j=1}^p x_j = 0$.

אם $1 \leq i \leq p$, אז לפי מבנה השורה ה- i של A (אלכסון 1, מחוץ לאלכסון בתוך הבלוק α , ובין בלוקים β) מתקבל:

$$(Ax)_i = 1 \cdot x_i + \sum_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}} \alpha x_j + \sum_{j=p+1}^n \beta x_j.$$

הסכום האחרון מתאפס כי $x_{p+1} = \cdots = x_n = 0$, ולכן

$$(Ax)_i = x_i + \alpha \sum_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}} x_j.$$

כעת

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}} x_j = \sum_{j=1}^p x_j - x_i = 0 - x_i = -x_i,$$

ומכאן

$$(Ax)_i = x_i + \alpha(-x_i) = (1 - \alpha)x_i.$$

אם $p+1 \leq i \leq n$, אז בשורה זו מופיעים רק מקדמי β מול הקואורדינטות $1, \dots, p$ (כי בבלוק השני x אפס), ולכן

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^p \beta x_j = \beta \sum_{j=1}^p x_j = 0 = (1 - \alpha)x_i.$$

לכן $Ax = (1 - \alpha)x \in U$, ובפרט U הוא A -אינווריאנטי, וההגבלה $A|_U$ היא כפל בסקלר $(1 - \alpha)$. באותו נימוק, לכל $y \in W$ מתקיים $Ay = (1 - \alpha)y$, ולכן גם W הוא A -אינווריאנטי ו- $A|_W = (1 - \alpha)\text{Id}_W$.

נגדיר

$$u = (\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{0, \dots, 0}_q), \quad v = (\underbrace{0, \dots, 0}_p, \underbrace{1, \dots, 1}_q), \quad S = \text{span}\{u, v\}.$$

כעת נחשב את Au ו- Av .

לכל $1 \leq i \leq p$ מתקיים:

$$(Au)_i = 1 \cdot 1 + \sum_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}} \alpha \cdot 1 + \sum_{j=p+1}^n \beta \cdot 0 = 1 + (p-1)\alpha.$$

ולכל $p+1 \leq i \leq n$ מתקיים:

$$(Au)_i = \sum_{j=1}^p \beta \cdot 1 + \left(1 \cdot 0 + \sum_{\substack{p+1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \alpha \cdot 0 \right) = p\beta.$$

לכן

$$Au = (1 + (p-1)\alpha)u + p\beta v.$$

באופן דומה,

$$Av = q\beta u + (1 + (q-1)\alpha)v.$$

מכאן ש- S הוא A -אינווריאנטי, ובבסיס (u, v) של S מתקבלת המטריצה

$$B = \begin{pmatrix} 1 + (p-1)\alpha & q\beta \\ p\beta & 1 + (q-1)\alpha \end{pmatrix}.$$

נטען כי

$$\mathbb{R}^n = (U \oplus W) \oplus S.$$

ראשית, $U \cap W = \{0\}$ כי וקטור ששייך לשניהם חייב להיות אפס בכל הקואורדינטות. כמו כן, אם $au + bv \in U \oplus W$, אז סכום רכיבי הבלוק הראשון הוא ap וחייב להיות 0, לכן $a = 0$, וסכום רכיבי הבלוק השני הוא bq וחייב להיות 0, לכן $b = 0$. מכאן $S \cap (U \oplus W) = \{0\}$.

כעת נראה שלכל $x \in \mathbb{R}^n$ קיים פירוק $x = x_{UW} + x_S$ עם $x_{UW} \in U \oplus W$ ו- $x_S \in S$. נסמן

$$s_1 = \sum_{i=1}^p x_i, \quad s_2 = \sum_{i=p+1}^n x_i,$$

ונגדיר

$$x_S = \frac{s_1}{p}u + \frac{s_2}{q}v \in S, \quad x_{UW} = x - x_S.$$

אז סכום רכיבי הבלוק הראשון של x_{UW} הוא $s_1 - s_1 = 0$ וסכום רכיבי הבלוק השני הוא $s_2 - s_2 = 0$, ולכן $x_{UW} \in U \oplus W$. מכאן הסכום הישר הוכח.

נבחר בסיס $\mathcal{B}$ המורכב מאיחוד בסיסים של U , של W , ובסיס (u, v) של S . בבסיס כזה, המטריצה של A היא בלוק אלכסונית מהצורה

$$(1 - \alpha)I_{n-2} \oplus B.$$

נסמן ב- P את מטריצת המעבר מן הבסיס $\mathcal{B}$ לבסיס הסטנדרטי. אז

$$P^{-1}AP = (1 - \alpha)I_{n-2} \oplus B.$$

משלבים את עובדות (ב) ו-(ג):

$$\det(A) = \det(P^{-1}AP) = \det((1 - \alpha)I_{n-2} \oplus B).$$

כעת, דטרמיננטה של מטריצה בלוק אלכסונית היא מכפלת הדטרמיננטות של הבלוקים (נובע ישירות מהגדרת הדטרמיננטה באמצעות פיתוח לפי שורות, או מהכפלויות $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ עם פירוק מתאים). לכן

$$\det(A) = \det((1 - \alpha)I_{n-2}) \cdot \det(B) = (1 - \alpha)^{n-2} \det(B).$$

נחשב את $\det(B)$:

$$\det(B) = (1 + (p - 1)\alpha)(1 + (q - 1)\alpha) - pq\beta^2.$$

ולכן

$$\det(A) = (1 - \alpha)^{n-2} \left((1 + (p - 1)\alpha)(1 + (q - 1)\alpha) - pq\beta^2 \right).$$

לפי עובדה (א), T איזומורפיזם אם ורק אם המטריצה המייצגת שלה בבסיס הסטנדרטי, שהיא A , הפיכה. לפי עובדה (ב), זה שקול ל- $\det(A) \neq 0$. לכן

$$\det(B) \neq 0 \iff (1 - \alpha)^{n-2} \neq 0 \iff \det(A) \neq 0 \iff T \text{ איזומורפיזם}$$

מאחר ש- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, מתקיים $(1 - \alpha)^{n-2} \neq 0$ אם ורק אם $\alpha \neq 1$. ולכן התנאי המדויק הוא:

$$\alpha \neq 1 \quad \text{וגם} \quad (1 + (p - 1)\alpha)(1 + (q - 1)\alpha) \neq pq\beta^2.$$

עבור $s \in \mathbb{R}$ נגדיר $T_s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ באמצעות

$$T_s(v) = A_s v, \quad A_s = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ s & 2 \end{pmatrix}.$$

המשולש Δ קודקודיו $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. מצאו את קודקודי תמונתו ואת שטחו, קבעו מתי T_s הפיכה, והסבירו מה קורה כאשר $s = 4$.

פתרון

תמונות הקודקודים הן $(0,0)$, $(2,s)$, $(1,2)$. למשולש המקורי שטח $1/2$, וגורם שינוי השטח הוא $|\det A_s| = |2 \cdot 2 - 1 \cdot s| = |4 - s|$. לכן שטח התמונה הוא $|4 - s|/2$. כמו כן, T_s הפיכה אם ורק אם $4 - s \neq 0$, כלומר $s \neq 4$. כאשר $s = 4$, שתי העמודות מקיימות $(2,4)^T = 2(1,2)^T$. כל תמונה היא אפוא כפולה של $(1,2)^T$, והמשולש קורס לקטע על הישר $y = 2x$, ששטחו אפס. עבור $s < 4$ האוריינטציה נשמרת, ועבור $s > 4$ היא מתהפכת. למשל, ב- $s = 1$ שטח התמונה הוא $3/2$.

תרגיל ממבחן

1. תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ כך ש- $\text{rank}(A^2) < \text{rank}(A)$. הוכיחו שקיים $v \in \mathbb{R}^n$ כך ש- $A^2 v = 0$ וגם $Av \neq 0$.

2. יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. הוכיחו כי

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n + \text{rank}(AB).$$

הסיקו שאם $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) > n$, אז $AB \neq 0$.

3. תהי $N \in M_n(\mathbb{R})$ כך ש- $N^2 = 0$ ו- $\text{rank}(N) = r$. חשבו את $\det(I_n + tN)$ ואת $\text{rank}(I_n + tN)$ לכל $t \in \mathbb{R}$.

פתרון

1. אם $Av = 0$, אז גם $A^2v = A(Av) = 0$. לכן $\ker A \subseteq \ker A^2$. ממשפט הממד והדרגה ומהאי־שוויון הנתון,

$$\begin{aligned}\dim \ker A^2 &= n - \text{rank}(A^2) \\ &> n - \text{rank}(A) = \dim \ker A.\end{aligned}$$

מכאן שההכלה ממש: $\ker A \subsetneq \ker A^2$. נבחר $v \in \ker A^2 \setminus \ker A$. אז $A^2v = 0$ לפי שייכותו לגרעין הראשון, ו־ $Av \neq 0$ לפי אי־שייכותו לשני. זהו וקטור שאחרי הפעלה אחת של A עדיין אינו מתאפס, ואחרי שתי הפעלות הוא מתאפס.

2. נתבונן בהעתקה המצומצמת

$$T: \text{Im } B \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad T(u) = Au.$$

התמונה שלה היא בדיוק $\text{Im}(AB)$: כל $u \in \text{Im } B$ הוא מהצורה $u = Bv$, ולכן $T(u) = ABv$, ולהפך כל וקטור ABv מתקבל בדרך הזאת. הגרעין שלה הוא $\ker A \cap \text{Im } B$. ממשפט הממד והדרגה עבור T ,

$$\text{rank}(B) = \dim(\text{Im } B \cap \ker A) + \text{rank}(AB).$$

אבל

$$\dim(\text{Im } B \cap \ker A) \leq \dim \ker A = n - \text{rank}(A).$$

נציב ונעביר אגפים:

$$\begin{aligned}\text{rank}(B) &\leq n - \text{rank}(A) + \text{rank}(AB), \\ \text{rank}(A) + \text{rank}(B) &\leq n + \text{rank}(AB).\end{aligned}$$

אם סכום הדרגות גדול מ־ n , נקבל $\text{rank}(AB) > 0$, ולכן AB אינה מטריצת האפס.

3. נחשב תחילה שתי מכפלות:

$$\begin{aligned}(I_n + tN)(I_n - tN) &= I_n - tN + tN - t^2N^2 = I_n, \\ (I_n - tN)(I_n + tN) &= I_n + tN - tN - t^2N^2 = I_n.\end{aligned}$$

לכן $I_n + tN$ הפיכה לכל $t \in \mathbb{R}$, וההופכית שלה היא $I_n - tN$. מכאן מיד

$$\text{rank}(I_n + tN) = n.$$

לשם חישוב הדטרמיננטה נשים לב ש־ $N^2 = 0$ גורר $\text{Im } N \subseteq \ker N$. לכן $r \leq n - r$, כלומר $2r \leq n$. נבחר בסיס $(u_1, \dots, u_r)$ ל־ $\text{Im } N$, ונרחיב אותו לבסיס $(u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_{n-2r})$ של $\ker N$. לכל j נבחר v_j כך ש־ $Nv_j = u_j$.

הרשימה

$$\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_{n-2r}, v_1, \dots, v_r)$$

היא בסיס: בהפעלת N על צירוף לינארי שמתאפס מתקבל צירוף של u_j , ולכן כל מקדמי v_j מתאפסים; אחר כך מתאפסים שאר המקדמים משום שהם מקדמים של בסיס $\ker N$. ברשימה יש n וקטורים בלתי־תלויים. בבסיס זה

$$[N]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [I_n + tN]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I_r & 0 & tI_r \\ 0 & I_{n-2r} & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{pmatrix}.$$

כאשר אחד מגודלי הבלוקים הוא אפס, פשוט משמיטים את הבלוק המתאים. זוהי מטריצה משולשית עליונה שכל איברי האלכסון שלה הם 1. לכן, מאחר שדטרמיננטה נשמרת תחת מעבר בסיס,

$$\det(I_n + tN) = 1 \quad \text{לכל } t \in \mathbb{R}.$$

שתי התוצאות אינן תלויות ב־ r : הדטרמיננטה היא 1 והדרגה היא n .

תרגול 11: ערכים עצמיים ולכסון

עיקרון מנחה

בסיום התרגול תוכלו לזהות כיוונים הנשמרים תחת העתקה, לחשב מרחבים עצמיים וריבויים, לבדוק לכסינות ולנצל בסיס עצמי לחישוב חזקות ולהבנת תהליך איטרטיבי. נבחין בין טענות התקפות תמיד לבין טענות התלויות בשדה או בהנחות נוספות.

11.1 דמיון מטריצות

הגדרה פורמלית

תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. נאמר ש- A דומה ל- B (ונסמן $A \sim B$) אם קיימת מטריצה הפיכה $P \in M_n(\mathbb{F})$ כך שמתקיים:

$$A = P^{-1}BP$$

טענה 11.1 -- (י).

יו $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. המטריצות דומות אם ורק אם קיים מרחב וקטורי V מממד n , אופרטור לינארי $T: V \rightarrow V$ ושני בסיסים סדורים $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ כך ש

$$A = [T]_{\mathcal{E}}, \quad B = [T]_{\mathcal{F}}.$$

אם P מעבירה קואורדינטות מן הבסיס $\mathcal{E}$ לבסיס $\mathcal{F}$, כלומר $[v]_{\mathcal{F}} = P[v]_{\mathcal{E}}$, אז

$$A = P^{-1}BP.$$

כך, דמיון מתאר את אותה פעולה בשתי מערכות קואורדינטות.

טענה 11.2 -- (א).

$A \sim B$, אזי הבאים נשמרים תחת דמיון:

1. **דטרמיננטה:** $\det(A) = \det(B)$.

2. **עקבה (Trace):** $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$.

3. **פולינום אופייני:** $P_A(x) = P_B(x)$.

4. **ערכים עצמיים:** ל- A ול- B יש בדיוק את אותם הערכים העצמיים, עם אותם ריבויים אלגבריים וגיאומטריים.

5. **דרגה: (Rank)** $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

6. **לכסינות:** A לכסינה $\iff B$ לכסינה.

הערה פורמלית

אזהרה:

שוויון בפולינום האופייני (ולכן שוויון בע"ע, בדטרמיננטה ובעקבה) **אינו מבטיח** שהמטריצות דומות. דוגמה נגדית קלאסית: המטריצות $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ אינן דומות, למרות שיש להן אותו פולינום אופייני x^2 . הסיבה: מטריצת האפס דומה רק לעצמה (ותוכלו להוכיח שכך גם כל מטריצה סקלרית).

11.2 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

11.2.1 מוטיבציה ורקע: למה צריך את זה?

עיקרון מנחה

הרעיון המרכזי מאחורי ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים הוא פשוט של מערכות מורכבות. אופרטורים לינאריים (ומטריצות) בדרך כלל מבצעים פעולות מסובכות של סיבוב וערבוב קואורדינטות במרחב. אנו מחפשים וקטורים שונים מאפס שעליהם הפעולה היא כפל בסקלר בלבד. אלה הם **וקטורים עצמיים**, והסקלר הוא **ערך עצמי**. מעל $\mathbb{R}$, ערך עצמי חיובי מותח או מכווץ לאורך אותו כיוון, ערך שלילי גם הופך את הכיוון, וערך אפס מאפס את הווקטור.

ערכים עצמיים משמשים לתיאור מודלים בתחומי ההנדסה השונים. הדוגמאות הבאות ממחישות כיצד משוואה אלגברית אחת מופיעה בהקשרים מגוונים:

- **אלגוריתם הדירוג של גוגל: (PageRank)** במודל של גלישה אקראית, מטריצת מעברים M מעבירה התפלגות הסתברות להתפלגות הבאה. התפלגות דירוג נייחת $\vec{r}$ מקיימת

$$M\vec{r} = \vec{r}, \quad r_i \geq 0, \quad \sum_i r_i = 1.$$

זו משוואת ערך עצמי עבור $\lambda = 1$. במודל PageRank המלא מוסיפים מנגנון מעבר אקראי כדי להתמודד עם מבנה הקישורים; התרגיל בהמשך בוחן מודל מצומצם.

- **מכניקת הקוונטים:** במודל קוונטי מממד סופי, מצב טהור מתואר על ידי וקטור מנורמל, והמילטוניאן הרמיטי H מייצג את האנרגיה. משוואת הערכים העצמיים

$$H\vec{\psi} = E\vec{\psi}$$

מזהה מצבי אנרגיה מוגדרת וערכי אנרגיה אפשריים. זהו יישום של אותה משוואה לינארית; תיאור כללי של מצבים מעורבים דורש כלי נוסף, מטריצת צפיפות.

- **מערכות של משוואות דיפרנציאליות:** אם A לכסינה ו- $A = PDP^{-1}$, ההצבה $\vec{y} = P\vec{z}$ במערכת $\vec{y}' = A\vec{y}$ נותנת

$$P\vec{z}' = AP\vec{z} = PD\vec{z} \implies \vec{z}' = D\vec{z}.$$

כל רכיב מקיים $z_i' = \lambda_i z_i$, ולכן $z_i(t) = z_i(0)e^{\lambda_i t}$. למערכת לינארית רציפה כל הפתרונות דועכים לאפס אם לכל הערכים העצמיים חלק ממשי שלילי. אם קיים ערך עצמי בעל חלק ממשי חיובי,

קיימים פתרונות גדלים. כאשר חלק ממשי הוא אפס, נדרשת בדיקה נוספת ואין להסיק דעיכה מהסימן בלבד.

- **סיווג נקודות קריטיות בחדו"א:** עבור פונקציה ממשית פעמיים גזירה ברציפות, בנקודה קריטית בוחנים את ההסיאן הסימטרי. אם כל ערכיו העצמיים חיוביים מתקבל מינימום מקומי ממש, ואם כולם שליליים מתקבל מקסימום מקומי ממש. נוכחות של ערכים חיוביים ושליליים מעידה על אוקף. כאשר קיימים ערכי אפס ואין שני סימנים, מבחן הנגזרות השניות עשוי להיות בלתי מכריע.

הגדרה פורמלית

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית (אופרטור לינארי). סקלר $\lambda \in \mathbb{F}$ נקרא **ערך עצמי** (ע"ע) של T אם קיים וקטור **שונה מאפס** $\vec{v} \in V$ (כלומר $\vec{v} \neq \vec{0}_V$) כך שמתקיים:

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$$

משוואה זו נקראת **משוואת הערכים העצמיים**. הווקטור $\vec{v}$ נקרא **וקטור עצמי** (ו"ע) של T השייך לערך העצמי λ .

הגדרה פורמלית

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית מסדר n . סקלר $\lambda \in \mathbb{F}$ נקרא **ערך עצמי** של המטריצה A אם קיים וקטור עמודה **שונה מאפס** $\vec{x} \in \mathbb{F}^n$ (כלומר $\vec{x} \neq \vec{0}$) כך שמתקיים:

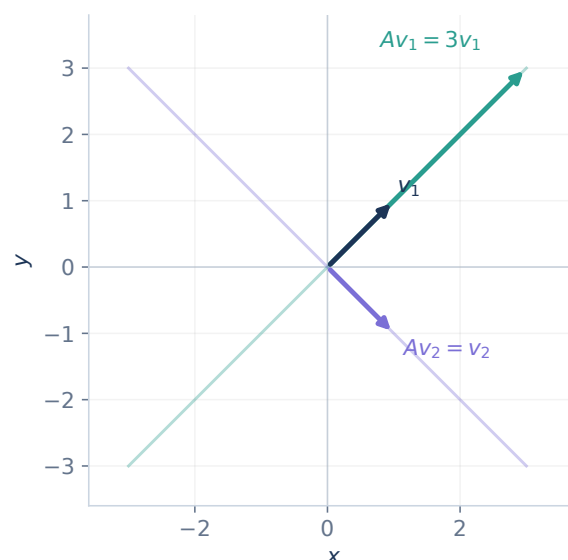
$$A\vec{x} = \lambda \vec{x}$$

משוואה זו נקראת **משוואת הערכים העצמיים**. הווקטור $\vec{x}$ נקרא **וקטור עצמי** של A השייך לערך העצמי λ .

הערה פורמלית

מעל $\mathbb{R}$, הישר $\text{span}\{\vec{x}\}$ נשמר תחת ההעתקה. כאשר $\lambda < 0$ הכיוון מתהפך; כאשר $\lambda = 0$ התמונה היא וקטור האפס. המושג האלגברי תקף גם מעל $\mathbb{C}$, אך אין לפרש כל ערך עצמי מרוכב כמתיחה של ישר ממשי.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$: invariant directions



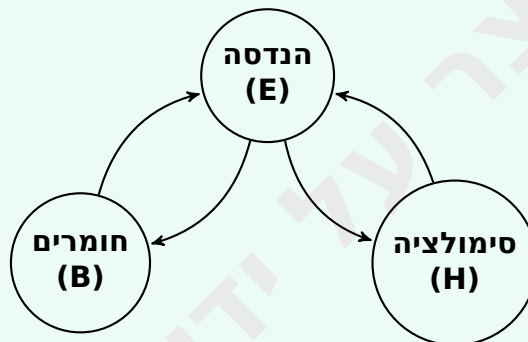
וקטורים בכיוונים עצמיים נשארים על הישרים שהם פורשים. וקטור כללי עשוי לשנות את כיוונו כתוצאה משילוב של גורמי מתיחה שונים.

נתונה רשת אינטרנט פנימית של אוניברסיטת תל אביב המורכבת מ-3 אתרים:

- **האתר המרכזי:** אתר הפקולטה להנדסה (נקרא לו E).
- **אתר לוויין 1:** אתר מאגר החומרים (נקרא לו B).
- **אתר לוויין 2:** אתר סביבת הסימולציות (נקרא לו H).

הקישורים בין האתרים הם כדלקמן:

- אתר **מאגר החומרים** (B) ואתר **הסימולציות** (H) מצביעים אך ורק לאתר הפקולטה (E).
- אתר **הפקולטה** (E) הוא פורטל המפנה את הגולשים בחזרה למאגר החומרים ולסביבת הסימולציות בהסתברות שווה.



מצאו התפלגות דירוג נייחת $\vec{r}$ שסכום רכיביה 1, והשוו את דירוג אתר הפקולטה לדירוג שני אתרי המשאבים.

פתרון

1. נגדיר את סדר האינדקסים: B (חומרים=1), E (הנדסה=2), H (סימולציה=3). נבנה את מטריצת המעברים M :

- עמודה B : מצביע רק ל- E . לכן $M_{2,1} = 1$.
- עמודה E : מתפצל חצי-חצי בין B ו- H . לכן $M_{1,2} = 0.5$, $M_{3,2} = 0.5$.
- עמודה H : מצביע רק ל- E . לכן $M_{2,3} = 1$.

המטריצה המתקבלת:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

2. נחפש את הוקטור העצמי $\vec{r} = (r_B, r_E, r_H)^T$ עבור הערך העצמי $\lambda = 1$ המקיים $M\vec{r} = \vec{r}$:

$$\begin{cases} 0.5r_E = r_B \\ r_B + r_H = r_E \\ 0.5r_E = r_H \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה והשלישית רואים מייד ש- $r_B = r_H = 0.5r_E$.

ננרמל כך שסכום הדירוגים הוא 1:

$$r_B + r_E + r_H = 1 \implies 0.5r_E + r_E + 0.5r_E = 1 \implies 2r_E = 1$$

ולכן $r_E = 0.5$, וכתוצאה מכך $r_B = 0.25$ ו- $r_H = 0.25$:
וקטור הדירוג הוא:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

3. מסקנה: אתר הפקולטה להנדסה ($r_E = 0.5$) מדורג **פי 2** מאתר מאגר החומרים ($r_B = 0.25$) ומאתר סביבת הסימולציות ($r_H = 0.25$).

הערה פורמלית

מצאנו התפלגות נייחת, ולא הוכחנו שכל איטרציה מתכנסת אליה. למעשה, מתחילת גלישה באתר הפקולטה בלבד מתקבל המחזור

$$(0, 1, 0)^T \mapsto (1/2, 0, 1/2)^T \mapsto (0, 1, 0)^T.$$

לכן מודל זה מדגים היטב את ההבדל בין קיום וקטור עצמי מנורמל לבין התכנסות של תהליך.

נתבונן במרחב הוקטורי V של כל הסדרות האינסופיות של מספרים ממשיים. כל וקטור במרחב הזה הוא סדרה אינסופית:

$$\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)$$

נגדיר העתקה לינארית (אופרטור) $T: V \rightarrow V$ שמכפילה כל איבר בסדרה במיקום שלו (באינדקס שלו):

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (1 \cdot x_1, 2 \cdot x_2, 3 \cdot x_3, 4 \cdot x_4, \dots)$$

לדוגמה: אם $\vec{v} = (1, 1, 1, \dots)$ אז $T(\vec{v}) = (1, 2, 3, \dots)$.
מצאו את **כל** הערכים העצמיים ואת **כל** הוקטורים העצמיים של T .

פתרון

1. נכתוב את משוואת הערכים העצמיים $T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ במפורש עבור וקטור כללי $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots)$:

$$(1x_1, 2x_2, 3x_3, \dots, nx_n, \dots) = \lambda \cdot (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$$

2. כדי ששוויון בין וקטורים יתקיים, הוא חייב להתקיים בכל רכיב בנפרד. נשווה את הרכיב ה- n :

$$n \cdot x_n = \lambda \cdot x_n$$

נעביר אגפים:

$$(n - \lambda) \cdot x_n = 0$$

3. משוואה זו חייבת להתקיים **לכל** אינדקס $n = 1, 2, 3, \dots$. נניח שבחרנו ערך עצמי כלשהו λ . עבור כל מיקום n שבו $\lambda \neq n$, הביטוי בסוגריים שונה מאפס, ולכן בהכרח $x_n = 0$.

4. זה אומר שהדרך היחידה לקבל וקטור שאינו וקטור האפס (שלא כל רכיביו אפסים), היא לבחור את λ להיות שווה לאחד המספרים הטבעיים.

בדיקה עבור $\lambda = 1$: המשוואה היא $(n-1)x_n = 0$. עבור $n = 1$: נקבל $0 \cdot x_1 = 0$ (כל x_1 מתאים). עבור $n \neq 1$: חייב להתקיים $x_n = 0$. הוקטור העצמי הוא: $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots)$.

בדיקה עבור $\lambda = 2$: המשוואה היא $(n-2)x_n = 0$. עבור $n = 2$: נקבל $0 \cdot x_2 = 0$ (כל x_2 מתאים). עבור $n \neq 2$: חייב להתקיים $x_n = 0$. הוקטור העצמי הוא: $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots)$.

5. סיכום: ישנם אינסוף ערכים עצמיים, והם כל המספרים הטבעיים:

$$\lambda_n = n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

לכל ערך עצמי n כל הווקטורים העצמיים הם $c\vec{e}_n$, כאשר $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ו- $\vec{e}_n$ היא סדרת היחידה במיקום n :

$$\vec{e}_n = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{n\text{-th place}}, \dots, 0)$$

הערה פורמלית

התרגיל עוסק במרחב כל הסדרות, ללא הנחת סכימות או נורמה. קבוצת סדרות היחידה $\{e_n\}$ אינה בסיס אלגברי של מרחב זה: צירופים לינאריים סופיים שלהן נותנים רק סדרות בעלות תמיכה סופית, ולא למשל את $(1, 1, 1, \dots)$. מבחינה אלגברית אפשר לבנות מודל דומה עם אינדקסים $n = 0, 1, 2, \dots$ ועם הפעולה $Ne_n = ne_n$. זהו מבנה המזכיר אופרטור מספר. אין להסיק מן התרגיל כשלעצמו שכל גדלי האנרגיה בטבע בדידים, או שכל אופרטור פיזיקלי פועל על מרחב כל הסדרות.

יהי $n \geq 2$ ויהי $V = M_n(\mathbb{C})$ מרחב המטריצות הריבועיות, ויהיו $p, q \in \mathbb{C}$ סקלרים ($q \neq 0$). נגדיר אופרטור לינארי $T: V \rightarrow V$ על ידי:

$$T(A) = pA + qA^T$$

מצאו את הערכים העצמיים ואת הווקטורים העצמיים של T , על ידי שימוש ישיר במשוואת הערכים העצמיים.

פתרון

תהי $A \neq 0$ מטריצה שהיא וקטור עצמי של T עם עצמי λ . אזי מתקיימת המשוואה:

$$pA + qA^T = \lambda A \quad (11.1)$$

נבודד את האיבר עם הטרנספוז:

$$qA^T = (\lambda - p)A$$

נחלק ב- q (נתון $q \neq 0$) ונקבל ביטוי מפורש ל- A^T כתלות ב- A :

$$A^T = \frac{\lambda - p}{q}A \quad (11.2)$$

כעת נפעיל שוב את פעולת הטרנספוז על שני אגפי משוואה (11.2):

$$(A^T)^T = \left(\frac{\lambda - p}{q}A \right)^T$$

נשתמש בתכונות הטרנספוז:

$$A = \frac{\lambda - p}{q}A^T$$

כעת, נציב את הביטוי של A^T שמצאנו במשוואה 11.2) בתוך המשוואה האחרונה:

$$A = \frac{\lambda - p}{q} \cdot \underbrace{\left(\frac{\lambda - p}{q} A \right)}_{A^T}$$

$$A = \left(\frac{\lambda - p}{q} \right)^2 A$$

נעביר אגף ונוציא את המטריצה A כגורם משותף מימין:

$$\left[1 - \left(\frac{\lambda - p}{q} \right)^2 \right] A = 0$$

מכיוון ש- $A \neq 0$ (וקטור עצמי), הסקלר בסוגריים חייב להתאפס, ולכן $\left(\frac{\lambda - p}{q} \right)^2 = 1$. זה מוביל לשני מקרים:

1. **אפשרות ראשונה:** $\frac{\lambda - p}{q} = 1$. נבודד את λ ונקבל את הערך העצמי הראשון:

$$\lambda_1 = p + q$$

כדי למצוא מי הם הוקטורים העצמיים השייכים ל- λ_1 , נחזור ונציב את הערך $\frac{\lambda - p}{q} = 1$ ישירות במשוואה 11.2):

$$A^T = 1 \cdot A \implies A^T = A$$

לכן, הוקטורים העצמיים המתאימים ל- λ_1 הם כל המטריצות הסימטריות השונות מאפס.

2. **אפשרות שנייה:** $\frac{\lambda - p}{q} = -1$. נבודד את λ ונקבל את הערך העצמי השני:

$$\lambda_2 = p - q$$

נחזור ונציב את הערך $\frac{\lambda - p}{q} = -1$ ישירות במשוואה 11.2):

$$A^T = -1 \cdot A \implies A^T = -A$$

לכן, הוקטורים העצמיים המתאימים ל- λ_2 הם כל המטריצות האנטי-סימטריות השונות מאפס.

11.3 מרחבים עצמיים, פולינום אופייני וריבויים

הגדרה פורמלית

הגדרה: מרחב עצמי V_λ

יהי λ ערך עצמי. המרחב העצמי V_λ מוגדר כאוסף כל הוקטורים העצמיים השייכים ל- λ (כולל וקטור האפס). הוא מתקבל ישירות ממשוואת הערכים העצמיים:

1. **עבור העתקה לינארית T :** נצא מהמשוואה $T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ ונעביר אגף:

$$T(\vec{v}) - \lambda \vec{v} = \vec{0} \implies T(\vec{v}) - \lambda I_V(\vec{v}) = \vec{0}$$

נוציא גורם משותף:

$$(T - \lambda I_V) \vec{v} = \vec{0}$$

לכן המרחב העצמי הוא הגרעין של האופרטור:

$$V_\lambda = \ker(T - \lambda I_V)$$

2. עבור מטריצה A : נצא מהמשוואה $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ ונעביר אגף:

$$\lambda\vec{v} - A\vec{v} = \vec{0} \implies \lambda I_n \vec{v} - A\vec{v} = \vec{0}$$

נוציא את הוקטור $\vec{v}$ כגורם משותף מימין:

$$(\lambda I_n - A)\vec{v} = \vec{0}$$

לכן המרחב העצמי הוא מרחב האפס (Nullspace) של המטריצה:

$$V_\lambda = N(\lambda I_n - A)$$

הגדרה פורמלית

הגדרה: פולינום אופייני וריבויים

1. פולינום אופייני $P_A(x)$: מוגדר כטרמיננטה של המטריצה המאפיינת:

$$P_A(x) = \det(xI_n - A)$$

2. ריבוי אלגברי $r_a(\lambda)$: מוגדר כמספר הפעמים (החזקה) שהערך העצמי λ מופיע כשורש של הפולינום האופייני $P_A(x)$.

3. ריבוי גיאומטרי $r_g(\lambda)$: מוגדר כמימד המרחב העצמי המתאים ל- λ :

$$r_g(\lambda) = \dim(V_\lambda) = \dim(N(\lambda I_n - A))$$

נתונה המטריצה הממשית

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

מצאו את הפולינום האופייני, את המרחבים העצמיים ואת הריבויים האלגבריים והגאומטריים. קבעו אם A לכסינה.

פתרון

המטריצה משולשית, ולכן

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2)^2.$$

לשני הערכים העצמיים 2, -1 ריבוי אלגברי 2. עבור -1 פותרים $(A + I)v = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} v = 0.$$

המשוואות הן $2v_2 = 0$, $3v_3 = 0$, $3v_4 = 0$, ולכן $E_{-1} = \text{span}\{e_1\}$ וריבוי הגאומטרי 1. עבור 2 מתקבלות מהשורות הראשונות של $A - 2I$ המשוואות $-3v_1 + 2v_2 = 0$, $-3v_2 = 0$. לכן $v_1 = v_2 = 0$.

$$E_2 = \text{span}\{e_3, e_4\}, \quad \dim E_2 = 2.$$

סכום ממדי המרחבים העצמיים הוא $1 + 2 = 3 < 4$, ולכן אין בסיס עצמי ו- A אינה לכסינה.

11.4 לכסון ובסיס עצמי

עיקרון מנחה

מטרת העל: מציאת בסיס של וקטורים עצמיים

הגדרה פורמלית

הגדרה: מטריצה לכסינה ובסיס מלכסןתהי $A \in M_n(\mathbb{F})$.

1. המטריצה A נקראת **לכסינה** (Diagonalizable) אם היא דומה למטריצה אלכסונית. כלומר, אם קיימת מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך שמתקיים:

$$D = P^{-1}AP \iff A = PDP^{-1}$$

במקרה זה, האלכסון של D מורכב מהערכים העצמיים של A :

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

2. העמודות של המטריצה המלכסנת P הן בדיוק **הוקטורים העצמיים** של A . מכיוון ש- P הפיכה, עמודותיה מהוות בסיס למרחב $\mathbb{F}^n$. בסיס זה נקרא **בסיס מלכסן**.

11.7. טענה

משפט הלכסון (הקריטריון ללכסינות)

מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ היא לכסינה אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. **פירוק מלא לגורמים**: הפולינום האופייני $P_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל השדה $\mathbb{F}$. כלומר, כל השורשים שלו נמצאים ב- $\mathbb{F}$.
2. **שוויון ריבויים**: לכל ערך עצמי λ של A , הריבוי הגיאומטרי שווה לריבוי האלגברי:

$$r_g(\lambda) = r_a(\lambda)$$

מסקנה שימושית: אם למטריצה A מסדר n יש n ערכים עצמיים **שונים**, אזי לכל ע"ע מתקיים $r_a = 1$, ומכאן בהכרח $r_g = 1$ (כי $1 \leq r_g \leq r_a$), ולכן המטריצה לכסינה אוטומטית.

הערה פורמלית

הסבר אינטואיטיבי: מדוע תמיד $1 \leq r_g(\lambda) \leq r_a(\lambda)$? נסמן $r = \dim V_\lambda$. מאחר ש- λ ערך עצמי, קיים וקטור עצמי שונה מאפס ולכן $r \geq 1$. נבחר בסיס של V_λ ונרחיב אותו לבסיס המרחב. בבסיס זה המטריצה היא מהצורה

$$\begin{pmatrix} \lambda I_r & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

הבלוק התחתון משמאל הוא אפס מפני שכל אחד מ- r וקטורי הבסיס הראשונים נשלח לכפולה של עצמו. לכן הפולינום האופייני הוא $(x - \lambda)^r \det(xI - D)$, ומכאן $r_g(\lambda) = r \leq r_a(\lambda)$.

הגדרה פורמלית

הגדרה: לכסינות של העתקה לינארית

תהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית מעל מרחב V ממימד סופי n . ההעתקה T נקראת **לכסינה** אם קיים בסיס $\mathcal{B}$ של המרחב V , כך שהמטריצה המייצגת של ההעתקה לפי בסיס זה, $[T]_{\mathcal{B}}$, היא מטריצה אלכסונית. בסיס כזה $\mathcal{B}$ מורכב בהכרח מוקטורים עצמיים של T , והוא נקרא **בסיס מלכסן**.

11.8. טענה

יהיו $v_1, \dots, v_k$ וקטורים עצמיים של מטריצה A (או העתקה T), השייכים לערכים עצמיים **שונים** $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. אזי הקבוצה $\{v_1, \dots, v_k\}$ היא **בלתי תלויה לינארית**.

עיקרון מנחה

אלגוריתם ללכסון העתקה לינארית
כדי ללכסן העתקה T (או למצוא בסיס מלכסן), נעבוד לפי השלבים הבאים:

1. בחירת בסיס נוח: נבחר בסיס כלשהו $\mathcal{C}$ למרחב V (לרוב הבסיס הסטנדרטי).

2. ייצוג מטריציוני: נחשב את המטריצה המייצגת $A = [T]_{\mathcal{C}}$.

3. פתרון הבעיה המטריציונית:

• נחשב פולינום אופייני $P_A(x)$.

• נמצא את הערכים העצמיים λ .

• לכל λ , נמצא בסיס למרחב העצמי (הגרעין) V_{λ} .

4. בדיקת לכסינות: נסכום את הריבויים הגיאומטריים $\sum r_g(\lambda)$. אם הסכום קטן מ- n , ההעתקה אינה לכסינה. אם הסכום הוא n , עברו לשלב הבא.

5. חילוף הבסיס המלכסן: הוקטורים שמצאנו בשלב 3 הם וקטורי קואורדינטות (ב- $\mathbb{R}^n$). עלינו לתרגם אותם חזרה לוקטורים ב- V לפי הבסיס שבחרנו בהתחלה $\mathcal{C}$. איחוד הוקטורים הללו הוא הבסיס המלכסן $\mathcal{B}$.

6. התוצאה: המטריצה המייצגת לפי הבסיס החדש תהיה:

$$[T]_{\mathcal{B}} = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

11.4.1 תרגילים בלכסון

11.9. דוגמה

פול' שיש לו פירוק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{R}$: $p(x) = x(x-1)(x-2)$.

11.10. דוגמה

פול' **שלא** מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{R}$: $q(x) = x^2 + 1$.
נשים לב כי $q(x)$ **כן** מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{C}$: $q(x) = (x-i)(x+i)$.

קבעו עבור כל אחת מן המטריצות אם היא לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ומעל $\mathbb{C}$. כאשר אפשר ללכסן, הציגו P, D מתאימות בשדה הרלוונטי:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

פתרון

1. עבור A_1 , הפולינום האופייני הוא $(\lambda - 4)^2$. המשוואה $(A_1 - 4I)v = 0$ מחייבת $2v_2 = 0$, ולכן המרחב העצמי הוא $\text{span}\{(1, 0)^T\}$ וממדו 1. הריבוי האלגברי 2 גדול מהריבוי הגאומטרי, ולכן אין לכסון באף אחד משני השדות.

2. ל- A_2 ערכים עצמיים שונים $-1, 1, 3$. עבור -1 אפשר לבחור e_1 . עבור 1 המשוואה $-2v_1 + 2v_2 = 0$ נותנת את הווקטור $(1, 1, 0)^T$. עבור 3 אפשר לבחור e_3 . לכן

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(-1, 1, 3).$$

העמודות בלתי תלויות, ו- $A_2 P = P D$ לפי תמונותיהן. זהו לכסון ממשי, ולכן גם מרוכב.

3. ל- A_3 הפולינום $\lambda^2 + 9$. אין לו שורש ממשי, ולכן אין לכסון ממשי. מעל $\mathbb{C}$ הערכים הם $3i, -3i$, והווקטורים $(3i, 1)^T, (-3i, 1)^T$ מתאימים להם:

$$A_3(\lambda, 1)^T = (-9, \lambda)^T = \lambda(\lambda, 1)^T \quad \text{כאשר } \lambda^2 = -9.$$

לפיכך

$$P_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 3i & -3i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_{\mathbb{C}} = \text{diag}(3i, -3i).$$

מכיוון ש- $\det P_{\mathbb{C}} = 6i \neq 0$, זהו לכסון מרוכב תקין.

בדומה לתרגיל על שחלוף, נניח $n \geq 2$ ונתבונן באופרטור $T: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ המוגדר על ידי:

$$T(A) = pA + qA^T$$

כאשר p, q סקלרים ו- $q \neq 0$. מצאו את הפולינום האופייני $P_T(x)$, ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי r_a, r_g (עבור כל ערך עצמי שמצאנו).

פתרון

בתרגילים קודמים ראינו שהמרחב כולו $V = M_n(\mathbb{R})$ מתפרק לסכום ישר של המרחבים העצמיים:

$$V = V_{p+q} \oplus V_{p-q} = S \oplus K$$

כאשר S הוא מרחב המטריצות הסימטריות ו- K הוא מרחב המטריצות האנטי-סימטריות.

1. עבור הערך העצמי $\lambda_1 = p + q$: המרחב העצמי הוא אוסף המטריצות הסימטריות:

$$V_{\lambda_1} = S = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$$

הריבוי הגיאומטרי הוא המימד של מרחב זה (מספר האיברים במשולש העליון כולל האלכסון):

$$r_g(p+q) = \dim(S) = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. **עבור הערך העצמי** $\lambda_2 = p - q$: המרחב העצמי הוא אוסף המטריצות האנטי-סימטריות:

$$V_{\lambda_2} = K = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$$

הריבוי הגיאומטרי הוא המימד של מרחב זה (מספר האיברים במשולש העליון ללא האלכסון, כי האלכסון חייב להיות 0):

$$r_g(p-q) = \dim(K) = \frac{n(n-1)}{2}$$

3. **הפולינום האופייני** $P_T(x)$: מכיוון שסכום הריבויים הגיאומטריים שווה למימד המרחב (כולו n^2), האופרטור לכסין. לכן הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי לכל ערך עצמי $r_a = r_g$.

הפולינום האופייני הוא מכפלת הגורמים הלינאריים, כאשר כל גורם מופיע בחזקת הריבוי שלו:

$$P_T(x) = (x - \lambda_1)^{r_a(\lambda_1)} \cdot (x - \lambda_2)^{r_a(\lambda_2)}$$

נציב את הערכים שמצאנו:

$$P_T(x) = \left(x - (p+q)\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \left(x - (p-q)\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

הערה פורמלית

ראינו בתרגול אינטואיציה לחישוב מימד של תת-מרחב:

$$\dim(\text{Subspace}) = \dim(\text{World}) - (\text{מספר האילוצים הבלתי תלויים})$$

במקרה שלנו, "העולם" הוא מרחב המטריצות $M_n(\mathbb{R})$ שמימדו n^2 .

1. **עבור המטריצות הסימטריות** S : התנאי הוא $A_{ij} = A_{ji}$. משוואה זו היא "אילוץ" רק כאשר $i < j$ (כי באלכסון $A_{ii} = A_{ii}$ זה זהות, ומתחת לאלכסון זה שקול למעל). מספר האילוצים הוא כמספר האיברים במשולש העליון הממש: $\frac{n(n-1)}{2}$. לכן המימד הוא:

$$n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n^2 - n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. **עבור המטריצות האנטי-סימטריות** K : התנאי הוא $A_{ji} = -A_{ij}$. כאן האילוצים מתחלקים לשניים:

- עבור $i < j$ יש $\frac{n(n-1)}{2}$ אילוצים (כמו בסימטריות).
- עבור $i = j$ (באלכסון): האילוץ הוא $A_{ii} = -A_{ii}$, שזה גורר $A_{ii} = 0$. ישנם n אילוצים כאלו.

סך כל האילוצים הוא $\frac{n(n-1)}{2} + n$. לכן המימד הוא:

$$n^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2} + n\right) = \frac{n(n-1)}{2}$$

הערה פורמלית

שימו לב לבדיקה פשוטה: סכום החזקות (הדרגות) בפולינום האופייני חייב להיות שווה למימד המרחב עליו פועל האופרטור.

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n + n^2 - n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

וזה אכן מימד המרחב $M_n(\mathbb{R})$.

יהי $n \in \mathbb{N}$. נתונה מטריצה משולשית עליונה $A \in M_n(\mathbb{R})$ באופן כללי:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

נתון כי איברי האלכסון $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ הם **שונים זה מזה** (כלומר $\lambda_i \neq \lambda_j$ לכל $i \neq j$).
נגדיר את הפולינום $P(x) = 2026x^{2025} - 58x^{58}$.
הוכיחו כי **קיימת** מטריצה $X \in M_n(\mathbb{R})$ המקיימת את המשוואה:

$$P(X) = A$$

פתרון

אסטרטגיית הפתרון: למרות שהמטריצה A מלאה ב"כוכביות" (ערכים לא ידועים) מעל האלכסון, הנתון הקריטי הוא שהערכים על האלכסון עצמו הם **שונים**. זהו אחד ממשפטי הלכסון: אם למטריצה מסדר n יש n ערכים עצמיים שונים, היא בהכרח לכסינה. ברגע שנדע שהיא לכסינה, נוכל לעבור לעבוד עם המטריצה האלכסונית (הפשוטה), לפתור שם את הבעיה בעזרת חדו"א, ואז לחזור חזרה.

1. הפולינום האופייני של מטריצה משולשית הוא מכפלת הגורמים האלכסוניים:

$$P_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)$$

לכן, הערכים העצמיים הם בדיוק $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. נתון שכל הערכים הללו שונים זה מזה, ולכן למטריצה A יש n וקטורים עצמיים בלתי תלויים. מסקנה: A לכסינה. קיימת מטריצה הפיכה M ומטריצה אלכסונית $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ כך ש:

$$A = MDM^{-1}$$

2. נחפש פתרון X שיהיה מאותה צורה: $X = MEM^{-1}$, כאשר $E = \text{diag}(c_1, \dots, c_n)$ היא מטריצה אלכסונית שנבנה כעת. הדרישה $P(X) = A$ מתרגמת למשוואה על המטריצות האלכסוניות:

$$P(E) = D$$

מכיוון ששתיהן אלכסוניות, זה שקול ל- n משוואות נפרדות:

$$P(c_i) = \lambda_i \quad \text{לכל } i = 1, \dots, n$$

3. נתבונן בפונקציה הממשית $f(t) = 2026t^{2025} - 58t^{58}$.

• הפונקציה רציפה.

• החזקה האי-זוגית הגבוהה מבטיחה ש- $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \pm\infty$.

לפי משפט ערך הביניים, הפונקציה היא "על" $\mathbb{R}$. לכן, לכל ערך עצמי λ_i (תהיה אשר תהיה הכוכבית במטריצה המקורית), קיים מספר ממשי c_i כך ש- $f(c_i) = \lambda_i$.

4. **בניית הפתרון הסופי:** נבחר את ה- c_i הללו ונציב אותם באלכסון של E . כעת נגדיר:

$$X = MEM^{-1}$$

ונוודא:

$$\begin{aligned} P(X) &= MP(E)M^{-1} = M \operatorname{diag}(P(c_1), \dots, P(c_n))M^{-1} \\ &= M \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)M^{-1} = MDM^{-1} = A \end{aligned}$$

הוכחנו שקיימת מטריצה כזו.

11.5 לכסון, חזקות ופרמטרים

תהי $A \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ המטריצה המוגדרת כך שיש 1 באלכסון שמעל הראשי ו-0 בשאר המקומות (כלומר, $A_{12} = A_{23} = A_{34} = 1$, ושאר הכניסות אפס).

1. הראו ש- A נילפוטנטית, כלומר שקיימת חזקה חיובית שלה השווה לאפס, ומצאו את הפולינום האופייני שלה.

2. מצאו את $\dim \ker(A^2)$ ואת $\dim \ker(A)$.

3. הוכיחו ש- A אינה לכסינה.

פתרון

1. המטריצה משולשית עליונה עם אפסים באלכסון, לכן הפולינום האופייני הוא $P_A(x) = x^4$. לפי משפט קיילי המילטון $A^4 = 0$ ולכן היא נילפוטנטית.

2. עבור A , יש משתנה חופשי אחד (העמודה הראשונה היא עמודת אפסים, ושאר העמודות בתל), לכן $\dim \ker(A) = 1$. עבור A^2 , האלכסון של ה-1 "זז" ימינה ועולה למעלה, ונקבל שתי עמודות אפסים ושתי עמודות בתל. לכן יש שני משתנים חופשיים: $\dim \ker(A^2) = 2$.

3. למטריצה ע"ע יחיד $\lambda = 0$ עם ריבוי אלגברי $r_a = 4$. מצאנו בסעיף הקודם שהריבוי הגיאומטרי הוא $r_g = \dim \ker(A) = 1$. מכיון ש- $1 \neq 4$, המטריצה אינה לכסינה.

יהי $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ מטריצה מעל שדה $\mathbb{F}$ בעל מאפיין שונה מ-2 (כלומר $1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} \neq 0_{\mathbb{F}}$, ולכן קיים ההופכי $2^{-1} = \frac{1}{2}$). נתון כי המטריצה מקיימת את השוויון $A^2 = I$.

1. הוכיחו כי כל ערך עצמי של A חייב להיות שייך לקבוצה $\{1, -1\}$.

2. הוכיחו כי A לכסינה. (הדרכה: הראו שכל וקטור במרחב ניתן להצגה כסכום של וקטורים עצמיים).

3. בסעיף זה נניח בנוסף $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. נתון כי $\operatorname{tr}(A) = t$. חשבו במפורש את הממדים $\dim \ker(A - I)$ ו- $\dim \ker(A + I)$ באמצעות n ו- t .

פתרון

1. יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של המטריצה A . לפי הגדרת ערך עצמי, קיים וקטור עצמי שונה מאפס $v \in \mathbb{F}^n, v \neq 0$ כך שמתקיים השוויון:

$$Av = \lambda v$$

נכפול את השוויון הזה משמאל במטריצה A :

$$A(Av) = A(\lambda v)$$

בצד שמאל נשתמש בקיבוץ סוגריים, ובצד ימין נוציא את הסקלר החוצה (לינאריות):

$$A^2v = \lambda(Av)$$

כעת נציב את הנתון $A^2 = I$ בצד שמאל, ואת השוויון $Av = \lambda v$ בצד ימין:

$$Iv = \lambda(\lambda v)$$

$$v = \lambda^2 v$$

נעביר את כל האיברים לאגף אחד:

$$\lambda^2 v - v = 0 \implies (\lambda^2 - 1)v = 0$$

מכיוון ש- $v \neq 0$ (וקטור עצמי אינו וקטור האפס), בהכרח הסקלר המכפיל אותו חייב להתאפס:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda^2 = 1$$

הפתרונות למשוואה זו בשדה הם $\lambda = 1$ או $\lambda = -1$.

2. כדי להוכיח ש- A לכסינה, עלינו להראות שקיים בסיס של וקטורים עצמיים למרחב כולו. זה שקול לכך שסכום המרחבים העצמיים הוא המרחב כולו: $V = V_1 + V_{-1}$. יהי $v \in \mathbb{F}^n$ וקטור כלשהו במרחב. נשתמש בזהות האלגברית הבאה (המותרת כי המאפיין שונה מ-2 ומותר לחלק ב-2):

$$v = \frac{1}{2}(v + Av) + \frac{1}{2}(v - Av)$$

נסמן את שני המחוברים באופן הבא:

$$u_1 = \frac{1}{2}(v + Av), \quad u_{-1} = \frac{1}{2}(v - Av)$$

מתקיים $v = u_1 + u_{-1}$. נוכיח שכל מחובר שיין למרחב העצמי המתאים; מחובר עשוי להיות אפס, ובמקרה זה אינו וקטור עצמי בעצמו: **בדיקה עבור u_1** : נפעיל את A :

$$A(u_1) = A\left(\frac{1}{2}(v + Av)\right) = \frac{1}{2}(Av + A^2v)$$

נציב $A^2 = I$:

$$= \frac{1}{2}(Av + v) = u_1$$

לכן $u_1 \in \ker(A - I)$ (ואם $u_1 \neq 0$, הוא וקטור עצמי עבור 1). **בדיקה עבור u_{-1}** : נפעיל את A :

$$A(u_{-1}) = A\left(\frac{1}{2}(v - Av)\right) = \frac{1}{2}(Av - A^2v)$$

נציב $A^2 = I$:

$$= \frac{1}{2}(Av - v) = -\frac{1}{2}(v - Av) = -u_{-1}$$

לכן $u_{-1} \in \ker(A + I)$ (ואם $u_{-1} \neq 0$, הוא וקטור עצמי עבור -1). **מסקנה**: כל וקטור שיין ל- $\ker(A - I) + \ker(A + I)$. החיתוך טריויאלי: אם $Az = z$ וגם $Az = -z$, אז $2z = 0$, ולכן $z = 0$. לפיכך זהו סכום ישר השווה לכל המרחב. איחוד בסיסי שני הגרעינים הוא בסיס עצמי, ולכן A לכסינה.

3. המטריצה A לכסינה, ולכן היא דומה למטריצה אלכסונית D . איברי האלכסון של D הם הערכים העצמיים 1 ו-1. נסמן: $k = \dim \ker(A - I)$ (הריבוי הגיאומטרי של 1 מספר הפעמים ש-1 מופיע באלכסון). $m = \dim \ker(A + I)$ (הריבוי הגיאומטרי של -1 מספר הפעמים ש-1 מופיע באלכסון).

אנו יודעים שני דברים: 1. סדר המטריצה הוא n , ולכן סכום הריבויים הוא n :

$$k + m = n$$

2. העקבה (Trace) נשמרת תחת דמיון מטריצות, ולכן שווה לסכום איברי האלכסון של D :

$$k \cdot (1) + m \cdot (-1) = t \implies k - m = t$$

קיבלנו מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים k, m (נחבר את המשוואות):

$$(k + m) + (k - m) = n + t \implies 2k = n + t \implies k = \frac{n + t}{2}$$

נחסר את המשוואה השנייה מהראשונה:

$$(k + m) - (k - m) = n - t \implies 2m = n - t \implies m = \frac{n - t}{2}$$

תשובה סופית:

$$\dim \ker(A - I) = \frac{n + t}{2}, \quad \dim \ker(A + I) = \frac{n - t}{2}.$$

הנחת השדה בסעיף זה חיונית לפירוש העקבה כהפרש של ממדים שלמים. בשדה ממאפיין חיובי, העקבה קובעת רק את ההפרש בשדה, ואינה קובעת בהכרח את הממדים השלמים.

עבור $t \in \mathbb{R}$ נתונה

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

מצאו את הערכים העצמיים וריבוייהם האלגבריים, חשבו את $\dim \ker(A(t) - 2I)$, וקבעו מתי המטריצה לכסינה. הוכיחו נוסחה לחזקה $A(t)^n$ לכל $n \geq 1$.

פתרון

מן המשוואות מתקבל $p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 5)$. לכן ל-2 ריבוי אלגברי 2, ול-5 ריבוי אלגברי 1. נחשב

$$A(t) - 2I = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

הגרעין מקיים $3v_3 = 0$, $tv_2 = 0$. אם $t \neq 0$, רק v_1 חופשי והממד 1. אם $t = 0$, גם v_2 חופשי והממד 2. לערך 5 ריבוי אלגברי 1, ולכן ריבוי גאומטרי 1. הפולינום מתפרק מעל $\mathbb{R}$, ולכן $A(t)$ לכסינה אם ורק אם $t = 0$. נטען כי

$$A(t)^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1}t & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \quad (n \geq 1).$$

עבור $n = 1$ מתקבלת $A(t)$. בהנחת הנוסחה ל- n , מכפלה ב- $A(t)$ מימין נותנת באלכסון $2^{n+1}, 2^{n+1}, 5^{n+1}$. הכניסה (1,2) היא סכום שתי המכפלות

$$2^n t + (n2^{n-1}t) \cdot 2 = (n+1)2^n t.$$

כל שאר הכניסות שמחוץ לאלכסון נשארות אפס, וזהו בדיוק הביטוי ל- $n + 1$. כך הושלמה האינדוקציה. עבור חזקה אפס מתקבל בנפרד $A^0 = I_3$.

יהי $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $u, v \in \mathbb{F}^n$ שני וקטורי עמודה שונים מאפס. נגדיר מטריצה חדשה $B = A + uv^T$ (הערה למתרגלים: זהו תיקון מדרגה 1).

1. נתון וקטור $x \in \mathbb{F}^n$ ($x \neq 0$) המקיים שתי תכונות:

- x הוא וקטור עצמי של A עם ערך עצמי λ (כלומר $Ax = \lambda x$).
- המכפלה $v^T x$ מתאפסת (כלומר $v^T x = 0$).

הוכיחו כי x הוא גם וקטור עצמי של המטריצה B , ומצאו את הערך העצמי המתאים.

2. נניח כעת כי A היא מטריצה אלכסונית $A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ וכי הוקטורים הם $u = v = (1, 1, \dots, 1)^T$. הוכיחו כי עבור כל סקלר λ שאינו שייך לקבוצת הערכים $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, מתקיים:

$$\lambda \text{ of eigenvalue an is } B \iff 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i - \lambda} = 0$$

3. עבור המקרה הפרטי שבו $n = 3$ והמטריצה היא $A = \text{diag}(0, 1, 3)$, חשבו במפורש את הפולינום האופייני של B (הניחו u, v כמו בסעיף הקודם).

פתרון

1. נבדוק ישירות האם x הוא וקטור עצמי של B על ידי כפל מטריצה בוקטור:

$$Bx = (A + uv^T)x$$

נפתח סוגריים:

$$= Ax + u(v^T x)$$

נציב את הנתונים: $Ax = \lambda x$ (כי x ו"ע של A) ו- $v^T x = 0$ (לפי הנתון).

$$= \lambda x + u(0) = \lambda x$$

מסקנה: קיבלנו $Bx = \lambda x$. מכיוון ש- $x \neq 0$, הוא וקטור עצמי של B עם אותו ערך עצמי λ .

2. אנו רוצים למצוא מתי $\det(\lambda I - B) = 0$. נציב את B :

$$\det(\lambda I - (A + uv^T)) = \det((\lambda I - A) - uv^T)$$

נסמן $D = \lambda I - A$. זוהי מטריצה אלכסונית שהאיברים שלה הם $\lambda - \alpha_i$. **מדוע D הפיכה?** הנחנו בשאלה ש- λ אינו שווה לאף α_i , ולכן כל איברי האלכסון של D שונים מאפס.

כעת, נוציא את D כגורם משותף מתוך הדטרמיננטה:

$$\det(D - uv^T) = \det(D(I - D^{-1}uv^T))$$

לפי כפליות הדטרמיננטה ($\det(XY) = \det(X) \det(Y)$):

$$= \det(D) \cdot \det(I - (D^{-1}u)v^T)$$

כדי ש- λ יהיה ע"ע, כל הביטוי צריך להיות שווה ל-0. מכיוון ש- D הפיכה, $\det(D) \neq 0$. לכן נותר לדרוש שהחלק השני יתאפס:

$$\det(I - (D^{-1}u)v^T) = 0$$

נשתמש בזהות $\det(I + xy^T) = 1 + y^T x$, ונצדיק אותה גם כאשר $y^T x = 0$ אם $x = 0$, שני האגפים שווים ל-1. אחרת נרחיב את x לבסיס. בבסיס זה, כל תמונה של xy^T שייכת ל- $\text{span}\{x\}$, והעמודה הראשונה היא $(y^T x, 0, \dots, 0)^T$. לכן $I + xy^T$ מיוצגת במטריצה משולשית שהאלכסון שלה הוא $(1 + y^T x, 1, \dots, 1)$, ודטרמיננטה $1 + y^T x$. אין צורך להניח של- xy^T יש ערך עצמי שונה מאפס. במקרה שלנו $x = -D^{-1}u$ ו- $y = v$. לכן הדטרמיננטה היא:

$$1 - v^T(D^{-1}u) = 0$$

נחשב את הביטוי $v^T D^{-1}u$: המטריצה D^{-1} היא אלכסונית עם איברים $\frac{1}{\lambda - \alpha_i}$. הכפל בוקטורי האחדות סוכם את האיברים:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda - \alpha_i} = 1$$

נעביר אגף ונקבל:

$$1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda - \alpha_i} = 0 \implies 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i - \lambda} = 0$$

3. נציב את הערכים $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 3$ בנוסחה שפיתחנו. הפולינום האופייני הוא המכפלה של $\det(D)$ בביטוי הסקלרי:

$$P_B(\lambda) = \underbrace{\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)}_{\det(D)} \cdot \left(1 + \frac{1}{-\lambda} + \frac{1}{1 - \lambda} + \frac{1}{3 - \lambda}\right)$$

נפתח סוגריים (נכפול את הפולינום החיצוני בכל אחד מהשברים):

$$= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3) - (\lambda - 1)(\lambda - 3) - \lambda(\lambda - 3) - \lambda(\lambda - 1)$$

נפתח את כל הסוגריים לאיברים בודדים:

$$= (\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda) - (\lambda^2 - 4\lambda + 3) - (\lambda^2 - 3\lambda) - (\lambda^2 - \lambda)$$

נכנס איברים דומים:

$$= \lambda^3 + (-4 - 1 - 1 - 1)\lambda^2 + (3 + 4 + 3 + 1)\lambda - 3$$

$$= \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 3.$$

הביטוי הרציונלי שימש לחישוב כאשר המכנים שונים מאפס. לאחר ביטולם מתקבלת זהות פולינומית, ולכן הנוסחה לפולינום האופייני תקפה גם ב- $\lambda = 0, 1, 3$. אפשר לאמת זאת ישירות מן המטריצה

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

שתי יחידות מחליפות מידע בכל צעד לפי הכלל

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

מצאו בסיס עצמי, חשבו נוסחה מפורשת ל- A^k ולשתי הקריאות, וקבעו את הגבול כאשר $k \rightarrow \infty$.

פתרון

נחשב את פעולת A על שני כיוונים:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

אלה וקטורים בלתי תלויים, ולכן

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(1, 1/2).$$

לכל מספר שלם $k \geq 0$,

$$A^k = PD^kP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+2^{-k} & 1-2^{-k} \\ 1-2^{-k} & 1+2^{-k} \end{pmatrix}.$$

לפיכך

$$x_k = \frac{x_0 + y_0}{2} + 2^{-k} \frac{x_0 - y_0}{2}, \quad y_k = \frac{x_0 + y_0}{2} - 2^{-k} \frac{x_0 - y_0}{2}.$$

הממוצע נשמר, בעוד ההפרש $x_k - y_k = 2^{-k}(x_0 - y_0)$ קטן בחצי בכל צעד. מכאן שתי הקריאות מתכנסות לממוצע ההתחלתי $(x_0 + y_0)/2$. הערך העצמי 1 מתאר את הרכיב הנשמר, והערך $1/2$ את רכיב השגיאה הדועך.

תרגיל ממבחן

יהי $\mathbb{C}_3[x] = \{p \in \mathbb{C}[x] : \deg p \leq 3\}$, ויהי $\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. נגדיר העתקה לינארית $T_\gamma : \mathbb{C}_3[x] \rightarrow \mathbb{C}_3[x]$ על ידי

$$T_\gamma(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 - a_0x + (\gamma a_2 - a_3)x^2 + 2a_3x^3.$$

- מצאו את המטריצה המייצגת של T_γ בבסיס הסטנדרטי $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$.
- קבעו עבור אילו ערכי γ ההעתקה T_γ לכסינה מעל $\mathbb{C}$.
- עבור הערך המינימלי של γ שעבורו T_γ לכסינה, כתבו את הפולינום האופייני.
- עבור אותו ערך של γ , מצאו בסיס שבו המטריצה המייצגת אלכסונית, וכתבו את המטריצה האלכסונית.

פתרון

- מחשבים את תמונות וקטורי הבסיס:

$$\begin{aligned} T_\gamma(1) &= -x, & T_\gamma(x) &= 1, \\ T_\gamma(x^2) &= \gamma x^2, & T_\gamma(x^3) &= -x^2 + 2x^3. \end{aligned}$$

עמודות המטריצה הן קואורדינטות התמונות באותו סדר:

$$A_\gamma = [T_\gamma]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- המטריצה בנויה משני בלוקים אלכסוניים מסדר 2. לכן הפולינום האופייני, במוסכמה $\chi_T(t)$

$\det(tI - [T])$ הוא

$$\begin{aligned}\chi_{T_\gamma}(t) &= \det \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} t-\gamma & 1 \\ 0 & t-2 \end{pmatrix} \\ &= (t^2 + 1)(t - \gamma)(t - 2).\end{aligned}$$

הערכים העצמיים הם $i, -i, \gamma, 2$. אם $\gamma \neq 2$, אלה ארבעה ערכים שונים, משום ש- γ ממשי. מטריצה מסדר 4 עם ארבעה ערכים עצמיים שונים היא לכסינה.

אם $\gamma = 2$, נחשב את המרחב העצמי המתאים ל-2:

$$A_2 - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

המשוואות הראשונות נותנות $a_1 = 2a_0$ ו- $-a_0 - 2a_1 = 0$. לכן $-5a_0 = 0$, ומכאן $a_0 = a_1 = 0$. מעל $\mathbb{C}$. המשוואה השלישית נותנת $a_3 = 0$, ואילו a_2 חופשי. לכן

$$\ker(A_2 - 2I) = \text{span}\{(0, 0, 1, 0)^T\}.$$

הריבוי הגאומטרי של 2 הוא 1, ואילו ריבוי האלגברי הוא 2, ולכן T_2 אינה לכסינה. בסיכום,

$$T_\gamma \text{ מעל } \mathbb{C} \iff \gamma \neq 2.$$

3. הערך המינימלי בתחום $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ הוא $\gamma = 0$, והוא מקיים את תנאי הלכסינות. לכן

$$\chi_{T_0}(t) = t(t-2)(t^2+1).$$

4. נבדוק ארבעה פולינומים עצמיים:

$$T_0(1+ix) = -x+i = i(1+ix),$$

$$T_0(1-ix) = -x-i = -i(1-ix),$$

$$T_0(x^2) = 0,$$

$$T_0(x^2 - 2x^3) = 2x^2 - 4x^3 = 2(x^2 - 2x^3).$$

אלה פולינומים עצמיים לא אפסיים השייכים לערכים עצמיים שונים, ולכן הם בלתי תלויים לינארית. מספרם הוא $\dim \mathbb{C}_3[x] = 4$, ולכן

$$\mathcal{E} = (1+ix, 1-ix, x^2, x^2 - 2x^3)$$

הוא בסיס. בסדר זה מתקבלת המטריצה

$$[T_0]_{\mathcal{E}} = \text{diag}(i, -i, 0, 2).$$

תרגיל ממבחן

נעבוד במרחב $V = \mathbb{R}^4$ עם הבסיס הסטנדרטי $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. נגדיר בסיס נוסף $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ על ידי

$$f_1 = e_1, \quad f_2 = e_1 + e_2, \quad f_3 = e_2 + e_3, \quad f_4 = e_3 + e_4.$$

נגדיר העתקה לינארית $T : V \rightarrow V$ על ידי $T(e_j) = f_j$ לכל $j = 1, 2, 3, 4$, והעתקה לינארית

$S : V \rightarrow V$ שהמטריצה המייצגת שלה בבסיס $\mathcal{F}$ היא

$$[S]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

נסמן $U = T^{-1} \circ S \circ T$.

1. חשבו את $[U]_{\mathcal{E}}$.

2. קבעו האם U לכסינה מעל $\mathbb{R}$ והאם היא לכסינה מעל $\mathbb{C}$. בכל מקרה שבו היא לכסינה, מצאו בסיס מלכסן ומטריצה אלכסונית. בדיון מעל $\mathbb{C}$ מתייחסים להרחבת U למרחב $\mathbb{C}^4$.

3. נגדיר $W : V \rightarrow V$ על ידי $[W]_{\mathcal{E}} = 2I_4$. קבעו האם קיים בסיס $\mathcal{B}$ כך ש- $[W]_{\mathcal{B}} = [U]_{\mathcal{B}}$, והאם קיים בסיס $\tilde{\mathcal{B}}$ כך ש- $[U]_{\tilde{\mathcal{B}}} = [W]_{\mathcal{E}}$.

פתרון

1. נסמן $J = [S]_{\mathcal{F}}$ ונסמן במטריצה P את הווקטורים $f_1, \dots, f_4$ כעמודות בבסיס $\mathcal{E}$. אז

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det P = 1.$$

כלומר $[v]_{\mathcal{E}} = P[v]_{\mathcal{F}}$, ובנוסף $[T]_{\mathcal{E}} = P$ מכיוון ש- $T(e_j) = f_j$. נוסחת מעבר הבסיס נותנת $[S]_{\mathcal{E}} = PJP^{-1}$, ולכן

$$\begin{aligned} [U]_{\mathcal{E}} &= [T^{-1}]_{\mathcal{E}}[S]_{\mathcal{E}}[T]_{\mathcal{E}} \\ &= P^{-1}(PJP^{-1})P = J. \end{aligned}$$

לכן

$$[U]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. הפולינום האופייני, במוסכמה $p_U(t) = \det(tI_4 - J)$, הוא

$$p_U(t) = \det \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} t & 5 \\ -5 & t \end{pmatrix} = (t^2 + 1)(t^2 + 25).$$

אין לו שורש ממשי. לפיכך אין אפילו וקטור עצמי ממשי לא־אפס, ובפרט U אינה לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

מעל $\mathbb{C}$ ארבעת הערכים העצמיים הם $i, -i, 5i, -5i$ והם שונים זה מזה. נציג במפורש וקטורים עצמיים:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

למשל,

$$Jv_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = iv_1, \quad Jv_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5i \\ 5 \end{pmatrix} = 5iv_3,$$

ובדומה $Jv_4 = -5iv_4$ ו- $Jv_2 = -iv_2$. אם $Q = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4)$, אז

$$\det Q = (2i)(2i) = -4 \neq 0.$$

לכן $\mathcal{B}_C = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ הוא בסיס מלכסן, ובו

$$[U]_{\mathcal{B}_C} = Q^{-1}JQ = \text{diag}(i, -i, 5i, -5i).$$

3. W היא ההעתקה $v \mapsto 2v$, ולכן בכל בסיס $\mathcal{B}$ מתקיים $[W]_{\mathcal{B}} = 2I_4$. אילו $[U]_{\mathcal{B}} = [W]_{\mathcal{B}}$, היו שתי ההעתקות שוות: לכל v הקואורדינטות של $U(v)$ ושל $W(v)$ היו זהות. אבל $U(e_1) = e_2$, ואילו $W(e_1) = 2e_1$. לכן בסיס כזה אינו קיים.

גם בסיס מהסוג השני אינו קיים. אכן, אם R היא מטריצת הבסיס $\tilde{\mathcal{B}}$ ביחס ל- $\mathcal{E}$, אז

$$R^{-1}JR = 2I_4 \implies J = R(2I_4)R^{-1} = 2I_4,$$

בסתירה למטריצה שמצאנו. שתי התשובות שליליות גם אם מתירים בסיסים מרוכבים.

תרגיל ממבחן

יהי $n \geq 4$, ותהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה לכסינה מעל $\mathbb{R}$ שיש לה בדיוק שני ערכים עצמיים שונים. נתון כי

$$\text{rank}(A - I_n) = n - 3, \quad \text{tr}(A) = 2n - 3, \quad \det A = 2^{n-3}.$$

1. מצאו את שני הערכים העצמיים ואת הריבויים האלגבריים שלהם.

2. כתבו את הפולינום האופייני $p_A(t)$.

3. חשבו את $\text{tr}(A^k)$ לכל $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

פתרון

1. ממשפט הממד והדרגה,

$$\dim \ker(A - I_n) = n - \text{rank}(A - I_n) = n - (n - 3) = 3.$$

לכן 1 הוא ערך עצמי, והמרחב העצמי שלו מממד 3. מאחר ש- A לכסינה, הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי שווה לריבוי הגאומטרי שלו. מכאן שהריבוי האלגברי של 1 הוא בדיוק 3.

נסמן את הערך העצמי האחר ב- λ . יש בדיוק שני ערכים עצמיים, ולכן הריבוי האלגברי של λ הוא $n - 3$. העקבה היא סכום הערכים העצמיים עם ריבוייהם, ולכן

$$3 \cdot 1 + (n - 3)\lambda = 2n - 3.$$

נחסר 3 ונקבל

$$(n - 3)\lambda = 2n - 6 = 2(n - 3).$$

כיוון ש- $n \geq 4$, מתקיים $n - 3 \neq 0$, ולכן $\lambda = 2$. כלומר הערכים העצמיים הם 1 בריבוי 3 ו-2 בריבוי $n - 3$. נתון הדטרמיננטה תואם לתוצאה:

$$\det A = 1^3 2^{n-3} = 2^{n-3}.$$

כאן די היה בנתוני הדרגה, הלכסינות, מספר הערכים העצמיים והעקבה; נתון הדטרמיננטה מספק בדיוק התאמה נוספת.

2. במוסכמה $p_A(t) = \det(tI_n - A)$ מתקבל

$$p_A(t) = (t-1)^3(t-2)^{n-3}.$$

אם משתמשים במוסכמה $\det(A - tI_n)$, יש להכפיל את הביטוי ב $(-1)^n$.

3. קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $A = PDP^{-1}$, כאשר

$$D = \text{diag}(1, 1, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{n-3}).$$

בכפל החוזר מתבטלים הגורמים $P^{-1}P$ שבין המטריצות, ולכן

$$A^k = PD^kP^{-1}, \quad D^k = \text{diag}(1, 1, 1, \underbrace{2^k, \dots, 2^k}_{n-3}).$$

עקבה נשמרת תחת דמיון, ומכאן

$$\text{tr}(A^k) = 3 + (n-3)2^k.$$

למשל עבור $k=1$ נקבל $3 + 2(n-3) = 2n-3$, כנדרש בנתון.

תרגול 12: מכפלות פנימיות, אורתוגונליות והיטלים

עיקרון מנחה

בתרגול זה נלמד כיצד מכפלה פנימית מודדת אורך וזווית, כיצד בוחרים בסיס אורתונורמלי, וכיצד היטל אורתוגונלי מפרק וקטור לרכיב בתת-מרחב ולרכיב המאונך לו. נדגיש את הקשר בין חישוב אלגברי לגאומטריה, ונשווה בין מכפלות פנימיות שונות.

12.1 מרחבי מכפלה פנימית

תזכורת (מההרצאה)

לאורך הפרק נסמן $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, ויהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. נסמן בהצמדה $\bar{\cdot} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ את פעולת ההצמדה הסטנדרטית, כלומר, אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אז $\overline{a + ib} = a - ib$, ואם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז $\bar{x} = x$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

תזכורת (מההרצאה)

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. מכפלה פנימית על V היא העתקה

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$$

המקיימת לכל $u, v, w \in V$ ולכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ את האקסיומות הבאות.

1. לינאריות במשתנה הראשון:

$$\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle.$$

2. סימטריות מוצמדת (הרמיטיות):

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}.$$

3. חיוביות:

$$\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}, \quad \langle v, v \rangle \geq 0, \quad \langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0.$$

הערה פורמלית: מן הלינאריות במשתנה הראשון וההרמיטיות נובעת לינאריות בהצמדה במשתנה השני, כלומר לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ולכל $u, v, w \in V$ מתקיים

$$\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \overline{\alpha} \langle u, v \rangle + \overline{\beta} \langle u, w \rangle.$$

במקרה $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ מתקבלת מכאן לינאריות רגילה גם במשתנה השני.

דוגמה 12.1.

דוגמאות סטנדרטיות למכפלות פנימיות:

• על $\mathbb{C}^n$ (וקטורים עמודה $u, v \in \mathbb{C}^n$):

$$\langle u, v \rangle := u^T \bar{v}.$$

על $\mathbb{R}^n$:

$$\langle u, v \rangle := u^T v.$$

• על $M_{m \times n}(\mathbb{C})$:

$$\langle A, B \rangle := \text{tr}(A^T \bar{B}).$$

• על $\mathbb{R}_n[x]$ (או על $(C([a, b], \mathbb{R}), \mathbb{R})$ עבור $a < b$):

$$\langle p, q \rangle := \int_a^b p(x) q(x) dx.$$

הגדרה פורמלית

יהי $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית. **הנורמה** המושרית על ידי המכפלה הפנימית מוגדרת לכל $v \in V$ על ידי

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

אז $\|v\| \in [0, \infty)$, ובפרט $\|v\| = 0$ אם ורק אם $v = 0$.

הגדרה פורמלית

מרחב מכפלה פנימית: אם V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ו- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ מכפלה פנימית על V , אז הזוג

$$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

נקרא **מרחב מכפלה פנימית**.

טענה 12.2.

יהי $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. לכל $n, m \in \mathbb{N}$ לכל מתקיים $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{F}$ ולכל $v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m \in V$

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^m \beta_j u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \bar{\beta}_j \langle v_i, u_j \rangle.$$

במקרה $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ מתקבל $\bar{\beta}_j = \beta_j$, ולכן הנוסחה מצטמצמת ל

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^m \beta_j u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j \langle v_i, u_j \rangle.$$

12.2 תרגילים ותוצאות בסיסיות

יהי $n \geq 1$ על $V = M_n(\mathbb{R})$ נגדיר

$$f(A, B) := \text{tr}(AB).$$

קבעו עבור אילו ערכים של n זוהי מכפלה פנימית, ונמקו.

פתרון

אם $n = 1$, נזהה מטריצות עם מספרים ממשיים, ואז $f(a, b) = ab$ היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}$. אם $n \geq 2$, נבחר $A = E_{12}$, כלומר $a_{12} = 1$ וכל יתר הכניסות אפס. מתקיים $A \neq 0$, אך $A^2 = 0$, ולכן

$$f(A, A) = \text{tr}(A^2) = 0.$$

מכאן שתנאי החיוביות המוגדרת נכשל, ולכן עבור $n \geq 2$ הפונקציה אינה מכפלה פנימית.

יהי $n \in \mathbb{N}$. תהי $M \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה סימטרית וחיובית מוגדרת, כלומר

$$M^T = M, \quad x^T M x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

נגדיר העתקה $\langle \cdot, \cdot \rangle_M : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי

$$\langle x, y \rangle_M := x^T M y.$$

1. הוכיחו ש- $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ היא מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^n$.
2. הראו שהנורמה המושרית היא $\|x\|_M = \sqrt{x^T M x}$.
3. דוגמה פיזיקלית: בניח שמערכת מכנית לינארית מתוארת על ידי מטריצת מסה M (בבסיס כלשהו של קואורדינטות כלליות). הראו כי האנרגיה הקינטית

$$T(v) = \frac{1}{2} v^T M v$$

שווה ל- $\frac{1}{2} \|v\|_M^2$.

פתרון

1. נבדוק את אקסיומות המכפלה הפנימית.

לינאריות במשתנה הראשון: יהיו $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^n$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. אז

$$\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle_M = (\alpha x_1 + \beta x_2)^T M y = \alpha x_1^T M y + \beta x_2^T M y = \alpha \langle x_1, y \rangle_M + \beta \langle x_2, y \rangle_M.$$

סימטריות: לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$ מתקיים

$$\langle x, y \rangle_M = x^T M y.$$

מאחר שזהו סקלר ממשי מתקיים $(x^T M y)^T = x^T M y$, ולכן

$$\langle x, y \rangle_M = (x^T M y)^T = y^T M^T x = y^T M x = \langle y, x \rangle_M,$$

כאשר השתמשנו ב- $M^T = M$.

חיוביות: לכל $x \in \mathbb{R}^n$ מתקיים

$$\langle x, x \rangle_M = x^T M x \geq 0,$$

ובנוסף $\langle x, x \rangle_M = 0$ אם ורק אם $x = 0$, משום ש- M חיובית מוגדרת. מכאן $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ היא מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^n$.

2. לפי הגדרת הנורמה המושרית ממכפלה פנימית מתקיים לכל $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_M := \sqrt{\langle x, x \rangle_M} = \sqrt{x^T M x}.$$

3. לכל $v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים

$$T(v) = \frac{1}{2} v^T M v = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle_M = \frac{1}{2} \|v\|_M^2,$$

ולכן האנרגיה הקינטית היא חצי ריבוע הנורמה המושרית מן המכפלה הפנימית $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$.

יהי $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ויהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. לכל מטריצה C נסמן $C^* := \overline{C}^T$, ובמקרה הממשי $C^* = C^T$. בהתאם למוסכמה שלפיה המכפלה הפנימית לינארית במשתנה הראשון, נגדיר

$$\langle x, y \rangle := y^* x = x^T \overline{y}.$$

1. הוכיחו כי $\langle Av, w \rangle = \langle v, A^* w \rangle$ לכל $v, w \in \mathbb{F}^n$.

2. תהי $G \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הרמיטית וחיובית מוגדרת. נגדיר

$$\langle x, y \rangle_G := y^* G x.$$

הוכיחו שזוהי מכפלה פנימית, והראו כי קיימת מטריצה יחידה A^{*G} המקיימת

$$\langle Av, w \rangle_G = \langle v, A^{*G} w \rangle_G \quad \text{לכל } v, w \in \mathbb{F}^n,$$

$$\text{וכי } A^{*G} = G^{-1} A^* G.$$

פתרון

1. מן הזהות $(A^* w)^* = w^* A$ נקבל

$$\langle Av, w \rangle = w^* Av = (A^* w)^* v = \langle v, A^* w \rangle.$$

2. לינאריות במשתנה הראשון נובעת מלינאריות הכפל המטריציוני. מאחר ש- $G^* = G$, מתקיים

$$\overline{\langle y, x \rangle_G} = \overline{x^* G y} = (x^* G y)^* = y^* G^* x = y^* G x = \langle x, y \rangle_G.$$

בנוסף $\langle x, x \rangle_G = x^* G x > 0$ לכל $x \neq 0$, ו- $\langle 0, 0 \rangle_G = 0$. כעת G הפיכה, שכן $Gx = 0$ עם $x \neq 0$ היה גורר $x^* G x = 0$. נגדיר $B := G^{-1} A^* G$. מתקיים

$$B^* = (G^{-1} A^* G)^* = G A G^{-1},$$

ולכן

$$\langle v, Bw \rangle_G = (Bw)^* G v = w^* B^* G v = w^* G A v = \langle Av, w \rangle_G.$$

ליחידות, אם גם C מקיימת את הזהות, נקבל $w^* (C^* G - G A) v = 0$ לכל v, w . בחירת $v = e_j$ ו- $w = e_i$ מראה שכל כניסה במטריצה $C^* G - G A$ מתאפסת. מכאן

$$C^* G = G A \implies C^* = G A G^{-1} \implies C = G^{-1} A^* G = B.$$

יהי $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ מרחב מ"פ מעל $\mathbb{C}$, ויהיו $u, v \in V$, כך ש- $u \neq v$. הראו כי קיים $w \in V$ עבורו $\langle w, u \rangle \neq \langle w, v \rangle$.

פתרון

נבחר $w = u - v$. מאחר ש- $u \neq v$, הווקטור w אינו אפס. מלינאריות בהצמדה במשתנה השני נובע בפרט חיבוריות, ולכן

$$\langle w, u \rangle - \langle w, v \rangle = \langle w, u - v \rangle = \langle u - v, u - v \rangle = \|u - v\|^2 > 0.$$

לפיכך $\langle w, u \rangle \neq \langle w, v \rangle$, כנדרש.

12.3 אורתוגונליות

הגדרה פורמלית

יהי $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית. וקטורים $v, w \in V$ נקראים **אורתוגונליים** אם $\langle v, w \rangle = 0$; נסמן $v \perp w$.

טענה 12.7

אם $v \perp b$ לכל $b \in B$, אז $v \perp \text{span}(B)$. אכן, לכל צירוף לינארי $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j b_j$ מתקיים

$$\langle v, s \rangle = \sum_{j=1}^k \overline{\alpha_j} \langle v, b_j \rangle = 0.$$

הגדרה פורמלית

קבוצה $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ נקראת **אורתוגונלית** אם

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \text{לכל } i \neq j.$$

אם בנוסף $\|v_i\| = 1$ לכל i , היא נקראת **אורתונורמלית**. במקרה זה

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

אם B היא גם בסיס של V , נכנה אותה בסיס אורתוגונלי או בסיס אורתונורמלי, בהתאמה.

תזכורת (מההרצאה)

נרמול: ניתן להפוך קבוצה אורתוגונלית לאורתונורמלית:

אם $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה אורתוגונלית שאינה מכילה את וקטור האפס, אז $\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}$ אורתונורמלית.

זאת משום שלכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $\left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_i}{\|v_i\|} \right\rangle = \frac{1}{\|v_i\|^2} \langle v_i, v_i \rangle = 1$

טענה 12.8.

- קבוצה אורתוגונלית שאינה מכילה את וקטור האפס היא בלתי תלויה לינארית.
- קבוצה אורתונורמלית היא בת"ל. (שימו לב - מפני שלכל אחד מאיבריה נורמה 1, היא אינה מכילה את וקטור האפס)
- ההיפך אינו נכון: למשל $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ עם המ"פ הסטנדרטית היא בת"ל אבל לא אורתוגונלית ולא אורתונורמלית.

יהיו $u, v \in \mathbb{R}^n$ כך שהווקטורים $a = 3v - 2u$ ו- $b = u - v$ אורתונורמליים במכפלה הסטנדרטית. חשבו את $\|u\|$, $\|v\|$ ו- $\langle u, v \rangle$, והוכיחו כי u, v בלתי תלויים.

פתרון

נפתור תחילה את שתי זהויות הווקטורים: מן $b = u - v$ מתקבל $u = v + b$. הצבה ב- $a = 3v - 2u$ נותנת $a = v - 2b$, ולכן

$$v = a + 2b, \quad u = a + 3b.$$

מכיוון ש- $\langle a, a \rangle = \langle b, b \rangle = 1$ ו- $\langle a, b \rangle = 0$,

$$\|v\|^2 = \langle a + 2b, a + 2b \rangle = 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4 = 5,$$

$$\|u\|^2 = \langle a + 3b, a + 3b \rangle = 1 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 9 = 10,$$

$$\langle u, v \rangle = \langle a + 3b, a + 2b \rangle = 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 6 = 7.$$

לפיכך $\|v\| = \sqrt{5}$, $\|u\| = \sqrt{10}$ ו- $\langle u, v \rangle = 7$. אם $\alpha u + \beta v = 0$ אז

$$(\alpha + \beta)a + (3\alpha + 2\beta)b = 0.$$

מאחר ש- a, b אורתונורמליים הם בלתי תלויים. לכן $\alpha + \beta = 0$ ו- $3\alpha + 2\beta = 0$. חיסור פעמיים הראשונה מהשנייה נותן $\alpha = 0$, ואז $\beta = 0$. הנתונים מספקים אפוא גם את הנורמות והמכפלה וגם אי תלות של u, v .

12.4 ייצוג לפי בסיס אורתוגונלי או אורתונורמלי

הגדרה פורמלית

יהי $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ מ"פ מעל שדה F . יהי $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ בסיס של V . לכל $v \in V$ יש ייצוג יחיד כצ"ל של איברי הבסיס: $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$. אם B בסיס אורתוגונלי אז מקדמי הצירוף נתונים ע"י: $\alpha_i = \frac{\langle v, b_i \rangle}{\|b_i\|^2}$. אם B בסיס אורתונורמלי אז $\|b_i\|^2 = 1$ ונקבל $\alpha_i = \langle v, b_i \rangle$. כלומר וק' הקור' לפי B יהיה:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, b_n \rangle \end{pmatrix}$$

ב- $\mathbb{C}^3$ משתמשים במכפלה הפנימית $\langle x, y \rangle = x^T \bar{y}$. נתונים

$$b_1 = \frac{1}{5}(3, 4i, 0)^T, \quad b_2 = \frac{1}{5}(4, -3i, 0)^T, \quad b_3 = (0, 0, 1)^T.$$

הראו ש- $B = (b_1, b_2, b_3)$ בסיס אורתונורמלי ומצאו את $[v]_B$ עבור $v = (1, 3i, 2)^T$.

פתרון

נחשב נורמות:

$$\|b_1\|^2 = \frac{3^2 + |4i|^2}{25} = \frac{9 + 16}{25} = 1, \quad \|b_2\|^2 = \frac{4^2 + |-3i|^2}{25} = 1, \quad \|b_3\|^2 = 1.$$

המכפלה היחידה שדורשת חישוב היא

$$\langle b_1, b_2 \rangle = \frac{3 \cdot 4 + (4i)\overline{-3i}}{25} = \frac{12 + (4i)(3i)}{25} = \frac{12 - 12}{25} = 0.$$

שתי המכפלות עם b_3 מתאפסות בגלל הרכיב השלישי. לכן B אורתונורמלי, ומאחר שיש בו שלושה וקטורים ב- $\mathbb{C}^3$, הוא בסיס. במוסכמת הלינאריות במשתנה הראשון המקדמים הם $\langle v, b_j \rangle$:

$$\langle v, b_1 \rangle = \frac{1 \cdot 3 + (3i)(-4i)}{5} = \frac{3 + 12}{5} = 3,$$

$$\langle v, b_2 \rangle = \frac{1 \cdot 4 + (3i)(3i)}{5} = \frac{4 - 9}{5} = -1, \quad \langle v, b_3 \rangle = 2.$$

לכן $[v]_B = (3, -1, 2)^T$. נודא בשחזור:

$$3b_1 - b_2 + 2b_3 = \left(\frac{9-4}{5}, \frac{12i+3i}{5}, 2 \right)^T = (1, 3i, 2)^T = v.$$

12.5 נורמות ואי-שוויון קושי-שוורץ

הגדרה פורמלית

יהי $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ויהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. **נורמה** על V היא פונקציה

$$\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$$

המקיימת לכל $u, v \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$ את האקסיומות הבאות:

1. **חיוביות מוחלטת:**

$$\|v\| \geq 0, \quad \|v\| = 0 \iff v = 0.$$

2. **הומוגניות :**

$$\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|.$$

3. **אי-שוויון המשולש:**

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

כאשר $|\alpha|$ הוא הערך המוחלט ב- $\mathbb{R}$ או המודולוס ב- $\mathbb{C}$. מרחב וקטורי המצויד בנורמה נקרא **מרחב נורמי** ומסומן $(V, \|\cdot\|)$.

טענה 12.11.

(אי-שוויון קושי-שוורץ) לכל $u, v \in V$ מתקיים

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

בנוסף, מתקיים שוויון אם ורק אם u, v תלויים לינארית, כלומר קיימת $\alpha \in \mathbb{F}$ כך ש- $u = \alpha v$ או $v = \alpha u$.

טענה 12.12.

(זווית במרחב ממשי) אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ו- $u, v \neq 0$, אז המספר

$$\cos \zeta := \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

מקיים $\cos \zeta \in [-1, 1]$. בפרט קיימת $\zeta \in [0, \pi]$ כך שהשוויון מתקיים.

יהיו $\omega, \zeta, \xi > 0$. הוכיחו את האי שוויון

$$\frac{\omega}{\zeta + \xi} + \frac{\zeta}{\xi + \omega} + \frac{\xi}{\omega + \zeta} \geq \frac{(\omega + \zeta + \xi)^2}{2(\omega\zeta + \zeta\xi + \xi\omega)}.$$

פתרון

נשתמש במכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^3$, כלומר $\langle x, y \rangle = x^T y$. נגדיר את הווקטורים

$$x = \left(\sqrt{\frac{\omega}{\zeta + \xi}}, \sqrt{\frac{\zeta}{\xi + \omega}}, \sqrt{\frac{\xi}{\omega + \zeta}} \right), \quad y = \left(\sqrt{\omega(\zeta + \xi)}, \sqrt{\zeta(\xi + \omega)}, \sqrt{\xi(\omega + \zeta)} \right).$$

אז מתקיים

$$\langle x, y \rangle = \sqrt{\frac{\omega}{\zeta + \xi}} \sqrt{\omega(\zeta + \xi)} + \sqrt{\frac{\zeta}{\xi + \omega}} \sqrt{\zeta(\xi + \omega)} + \sqrt{\frac{\xi}{\omega + \zeta}} \sqrt{\xi(\omega + \zeta)} = \omega + \zeta + \xi.$$

כמו כן,

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \left(\sqrt{\frac{\omega}{\zeta + \xi}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{\zeta}{\xi + \omega}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{\xi}{\omega + \zeta}} \right)^2 = \frac{\omega}{\zeta + \xi} + \frac{\zeta}{\xi + \omega} + \frac{\xi}{\omega + \zeta},$$

וכן

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \langle y, y \rangle \\ &= \left(\sqrt{\omega(\zeta + \xi)} \right)^2 + \left(\sqrt{\zeta(\xi + \omega)} \right)^2 + \left(\sqrt{\xi(\omega + \zeta)} \right)^2 \\ &= \omega(\zeta + \xi) + \zeta(\xi + \omega) + \xi(\omega + \zeta). \end{aligned}$$

נפתח את הסכום האחרון:

$$\omega(\zeta + \xi) + \zeta(\xi + \omega) + \xi(\omega + \zeta) = (\omega\zeta + \omega\xi) + (\zeta\xi + \zeta\omega) + (\xi\omega + \xi\zeta) = 2(\omega\zeta + \zeta\xi + \xi\omega).$$

אי שוויון קושי-שוורץ נותן

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2,$$

ולכן

$$(\omega + \zeta + \xi)^2 \leq \left(\frac{\omega}{\zeta + \xi} + \frac{\zeta}{\xi + \omega} + \frac{\xi}{\omega + \zeta} \right) \cdot 2(\omega\zeta + \zeta\xi + \xi\omega).$$

מאחר ש- $2(\omega\zeta + \zeta\xi + \xi\omega) > 0$, נחלק ונקבל

$$\frac{\omega}{\zeta + \xi} + \frac{\zeta}{\xi + \omega} + \frac{\xi}{\omega + \zeta} \geq \frac{(\omega + \zeta + \xi)^2}{2(\omega\zeta + \zeta\xi + \xi\omega)},$$

כמבוקש.

12.6 המשלים האורתוגונלי וההיטל האורתוגונלי

הגדרה פורמלית

יהי $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ויהי $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית. לכל $S \subseteq V$ נגדיר את המשלים האורתוגונלי של S על ידי

$$S^\perp := \{v \in V : \forall s \in S, \langle v, s \rangle = 0\}.$$

בפרט, אם $W \subseteq V$ תת-מרחב, אז $W^\perp$ נקרא המרחב המאונך ל- W .

הגדרה פורמלית

יהיו $U, W \subseteq V$ תת-מרחבים. נאמר כי U ו- W אורתוגונליים (נסמן $U \perp W$) אם

$$\forall u \in U \forall w \in W \quad \langle u, w \rangle = 0.$$

טענה 12.14.

יהי $S \subseteq V$ ויהיו $U, W \subseteq V$ תת-מרחבים. מתקיימות הטענות הבאות:

1. $S^\perp$ הוא תת-מרחב של V .
2. אם $S \subseteq T \subseteq V$, אז $T^\perp \subseteq S^\perp$.
3. מתקיים $(\text{span } S)^\perp = S^\perp$.
4. מתקיים $W \cap W^\perp = \{0\}$.
5. מתקיים $U \perp W \iff U \subseteq W^\perp \iff W \subseteq U^\perp$.
6. מתקיים $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.
7. אם V מממד סופי, אז $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.
8. אם $U \perp W$, אז $U + W = U \oplus W$.
9. מתקיים $W \subseteq (W^\perp)^\perp$. אם V מממד סופי אז $(W^\perp)^\perp = W$.

תזכורת (מההרצאה)

בכל תוצאות ההיטל להלן נניח ש- V מממד סופי. בממד אינסופי, סגירות של W לבדה אינה מספיקה במרחב מכפלה פנימית כללי: משפט ההטלה תקף אם V שלם בנורמה המושרית, כלומר מרחב הילברט, ו- W סגור. אפשר גם להסתפק בכך ש- W מממד סופי, ללא הנחת שלמות על V .

הגדרה פורמלית

נניח ש- V מממד סופי, ויהי $W \subseteq V$ תת-מרחב. ההיטל האורתוגונלי על W הוא ההעתקה $P_W : V \rightarrow W$ המוגדרת כך שלכל $v \in V$, האיבר $P_W(v) \in W$ הוא היחיד המקיים

$$v - P_W(v) \in W^\perp.$$

טענה 12.15.

נניח ש- V מממד סופי ו- $W \subseteq V$ תת-מרחב. מתקיימות הטענות הבאות:

1. לכל $v \in V$ קיימים יחידים $w \in W$ ו- $z \in W^\perp$ כך ש

$$v = w + z, \quad P_W(v) = w.$$

בפרט מתקיים $V = W \oplus W^\perp$.

2. P_W לינארית.

3.

$$P_W^2 = P_W, \quad \text{Im}(P_W) = W, \quad \ker(P_W) = W^\perp.$$

4. לכל $v \in V$ מתקיים

$$P_W(v) \perp (v - P_W(v)), \quad \|v\|^2 = \|P_W(v)\|^2 + \|v - P_W(v)\|^2.$$

5. לכל $u, v \in V$ מתקיים

$$\langle P_W(u), v \rangle = \langle u, P_W(v) \rangle.$$

6. לכל $v \in V$ מתקיים $\|P_W(v)\| \leq \|v\|$.

תזכורת (מההרצאה)

אם $\dim V < \infty$ ו- $\{e_1, \dots, e_k\}$ בסיס אורתונורמלי של W , אז לכל $v \in V$ מתקיים

$$P_W(v) = \sum_{i=1}^k \langle v, e_i \rangle e_i,$$

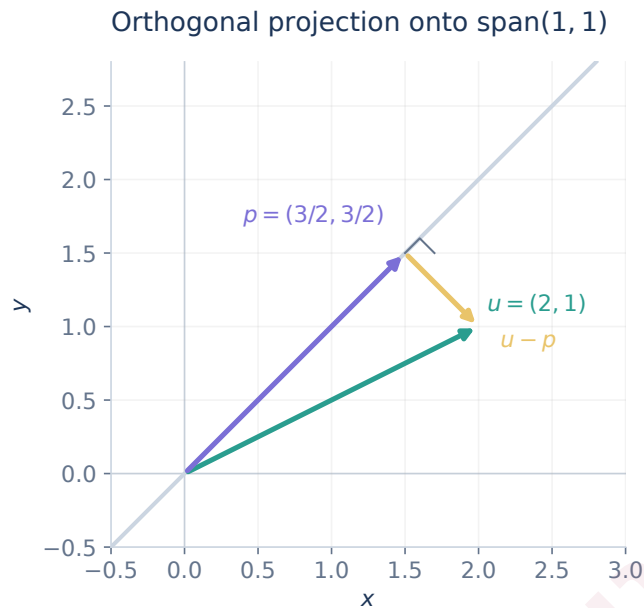
ובפרט

$$W^\perp = \{v \in V : \langle v, e_i \rangle = 0 \ \forall i = 1, \dots, k\}.$$

טענה 12.16.

אם $\dim V < \infty$ ו- $W \subseteq V$ תת-מרחב, אז מתקיים

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V.$$



היטל אורתוגונלי מפרק וקטור לרכיב בתת-המרחב ולשאריית מאונכת לו. שני הרכיבים מקיימים את משפט פיתגורס.

נתונים $u = (2, 1)^T$, $y = (-2, 9)^T$ ו- $W = \text{span}\{u\}$. במכפלה המשוקללת $\langle x, z \rangle_M = x^T M z$ עם $M = \text{diag}(1, 4)$, חשבו את $P_W^M(y)$ ובדקו את אורתוגונליות השאריית. השוו להיטל $P_W^I(y)$ במכפלה הסטנדרטית.

פתרון

M סימטרית וחיובית מוגדרת, שכן $x^T M x = x_1^2 + 4x_2^2 > 0$ כאשר $x \neq 0$. מקדם ההיטל המשוקלל הוא

$$t_M = \frac{y^T M u}{u^T M u} = \frac{(-2) \cdot 2 + 4 \cdot 9 \cdot 1}{2^2 + 4 \cdot 1^2} = \frac{-4 + 36}{8} = 4.$$

לכן $P_W^M(y) = 4u = (8, 4)^T$ והשאריית היא $r_M = (-10, 5)^T$. נבדוק:

$$r_M^T M u = (-10) \cdot 2 + 4 \cdot 5 \cdot 1 = -20 + 20 = 0.$$

במכפלה הסטנדרטית מתקבל

$$t_I = \frac{y^T u}{u^T u} = \frac{-4 + 9}{4 + 1} = 1, \quad P_W^I(y) = u = (2, 1)^T.$$

השאריית היא $r_I = (-4, 8)^T$, ואכן $r_I^T u = -4 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 0$. בשני המקרים ההיטל נמצא ב- W והשאריית מאונכת לו במכפלה המתאימה. שינוי המכפלה משנה את ההיטל; כאן שני ההיטלים וכל רכיביהם שלמים.

12.7 העתקות במרחבי מכפלה פנימית

יהי $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ מממד $n \geq 3$. יהיו $v, w \in V$ וקטורים אורתונורמליים, כלומר $\langle v, v \rangle = \langle w, w \rangle = 1$ ו- $\langle v, w \rangle = 0$. נגדיר העתקה לינארית $T: V \rightarrow V$ על ידי

$$T(u) = \langle u, v \rangle w + \langle u, w \rangle v.$$

- מצאו את כל ערכי העצמי של T , את כל הווקטורים העצמיים, ואת הפולינום האופייני של T .
- הוכיחו שלכל $u \in V$ מתקיים $\|T(u)\| \leq \|u\|$, ומצאו את כל u שעבורם מתקיים שוויון.

פתרון

- נתחיל ממשוואת הערכים העצמיים, ונשתמש בפירוק אורתוגונלי כדי להשוות רכיבים:

$$T(u) = \lambda u.$$

נפרק כל $u \in V$ ביחס לפירוק האורתוגונלי

$$V = \text{span}\{v, w\} \oplus (\text{span}\{v, w\})^\perp.$$

להלן $\{v, w\}^\perp$ מצוין את המשלים האורתוגונלי של $\text{span}\{v, w\}$. כלומר קיימים יחידים $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ו- $y \in \{v, w\}^\perp$ כך ש

$$u = \alpha v + \beta w + y.$$

כעת נחשב את $T(u)$: מאחר ש- $y \perp v, w$ מתקיים $\langle y, v \rangle = \langle y, w \rangle = 0$, ולכן

$$\langle u, v \rangle = \langle \alpha v + \beta w + y, v \rangle = \alpha, \quad \langle u, w \rangle = \langle \alpha v + \beta w + y, w \rangle = \beta.$$

מכאן

$$T(u) = \alpha w + \beta v.$$

נציב במשוואת הערכים העצמיים $T(u) = \lambda u$ ונקבל

$$\alpha w + \beta v = \lambda(\alpha v + \beta w + y).$$

נשווה רכיבים לפי הפירוק הישר $\text{span}\{v, w\} \oplus \{v, w\}^\perp$. הרכיב ב- $\{v, w\}^\perp$ בצד שמאל הוא 0, ולכן מוכרח להתקיים

$$\lambda y = 0.$$

מכאן:

- אם $\lambda \neq 0$, אז $y = 0$, ולכן $u \in \text{span}\{v, w\}$.
- אם $\lambda = 0$, אז מתקיים $T(u) = 0$, וממשוואת $\alpha w + \beta v = 0$ נקבל $\alpha = \beta = 0$, ולכן $u = y \in \{v, w\}^\perp$.

כעת נבחן את המקרה $\lambda \neq 0$, ואז $u = \alpha v + \beta w$ ו- $y = 0$. משוואת הערכים העצמיים נעשית

$$\alpha w + \beta v = \lambda(\alpha v + \beta w).$$

נשווה מקדמים של v ושל w ונקבל את המערכת

$$\beta = \lambda\alpha, \quad \alpha = \lambda\beta.$$

נציב ונקבל $\alpha = \lambda(\lambda\alpha) = \lambda^2\alpha$, ולכן

$$(\lambda^2 - 1)\alpha = 0.$$

אם $\alpha = 0$ אז מן השוויון $\beta = \lambda\alpha$ נקבל גם $\beta = 0$, ולכן $u = 0$, בסתירה לדרישת וקטור עצמי. לכן $\alpha \neq 0$ ומתקבל

$$\lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda \in \{1, -1\}.$$

כעת נמצא את הווקטורים העצמיים:

• עבור $\lambda = 1$ מתקבל $\beta = \alpha$, ולכן $u = \alpha(v + w)$, כלומר

$$V_1 = \text{span}\{v + w\}.$$

• עבור $\lambda = -1$ מתקבל $\beta = -\alpha$, ולכן $u = \alpha(v - w)$, כלומר

$$V_{-1} = \text{span}\{v - w\}.$$

• עבור $\lambda = 0$ קיבלנו $u \in \{v, w\}^\perp$, ולכן

$$V_0 = \{v, w\}^\perp.$$

בפרט, הראינו שאין ערכי עצמי נוספים, משום שמשוואת הערכים העצמיים כפתה $\lambda \in \{0, 1, -1\}$.

כעת נכתוב פולינום אופייני: נבחר בסיס אורתונורמלי של V מהצורה

$$B = (v, w, e_3, \dots, e_n),$$

כאשר $e_3, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של $\{v, w\}^\perp$. אז מתקיים

$$T(v) = w, \quad T(w) = v, \quad T(e_i) = 0 \quad (i = 3, \dots, n).$$

לכן מטריצת הייצוג של T ביחס ל- B היא

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

מכאן הפולינום האופייני הוא

$$p_T(\lambda) = \det(\lambda I - [T]_B) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - 1)\lambda^{n-2}.$$

2. נגדיר $\alpha := \langle u, v \rangle$ ו- $\beta := \langle u, w \rangle$, ונגדיר

$$s := \alpha v + \beta w \in \text{span}\{v, w\}.$$

מאחר ש- v, w אורתונורמליים מתקיים

$$\|s\|^2 = \langle s, s \rangle = \alpha^2 + \beta^2 = \langle u, v \rangle^2 + \langle u, w \rangle^2 = \|T(u)\|^2.$$

כמו כן,

$$\langle u, s \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, w \rangle = \alpha^2 + \beta^2 = \|s\|^2.$$

לפי אי שוויון קושי-שוורץ מתקיים

$$|\langle u, s \rangle| \leq \|u\| \|s\|.$$

מאחר ש- $|\langle u, s \rangle| = \|s\|^2$, נקבל

$$\|s\|^2 \leq \|u\| \|s\|.$$

אם $s = 0$ אז $\|T(u)\| = \|s\| = 0 \leq \|u\|$. ואם $s \neq 0$ נחלק ב- $\|s\|$ ונקבל

$$\|T(u)\| = \|s\| \leq \|u\|.$$

כדי לבדוק שוויון, נכתוב $u = s + y$ עם $y \in \{v, w\}^\perp$. לפי פיתגורס,

$$\|u\|^2 = \|s\|^2 + \|y\|^2 = \|T(u)\|^2 + \|y\|^2.$$

לכן $\|T(u)\| = \|u\|$ אם ורק אם $y = 0$, כלומר אם ורק אם $u \in \text{span}\{v, w\}$. נימוק זה כולל גם את המקרה $s = 0$, שבו שוויון מחייב $u = 0$.

יהי $n \geq 3$ מספר טבעי ויהי $a \in \mathbb{R}$. נגדיר את המטריצה $A_n(a) \in M_n(\mathbb{R})$ על ידי

$$(A_n(a))_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ a, & i \neq j. \end{cases}$$

נזכיר הגדרה: מטריצה הרמיטית $H \in M_n(\mathbb{C})$ נקראת חיובית למחצה אם לכל $x \in \mathbb{C}^n$ מתקיים $x^* H x \geq 0$, ונקראת חיובית מוגדרת אם לכל $x \neq 0$ מתקיים $x^* H x > 0$.

- מצאו לכל a את כל הערכים העצמיים של $A_n(a)$ ואת ריבוייהם.
- מצאו עבור אילו ערכים של a המטריצה $A_n(a)$ היא חיובית מוגדרת, ועבור אילו ערכים היא חיובית למחצה.
- מצאו את $\text{rank}(A_n(a))$ ואת $\ker(A_n(a))$ בשני "מקרי הקצה" שבהם $A_n(a)$ חיובית למחצה אך אינה חיובית מוגדרת.

בנוסף, יהי $B \in M_n(\mathbb{C})$ ונסמן $B^* = \overline{B}^T$. נגדיר

$$H := B^* B + I.$$

(4) הוכיחו ש- H חיובית מוגדרת, ובפרט הפיכה.

(5) הוכיחו שלכל $x \in \mathbb{C}^n$ מתקיים

$$x^* H^{-1} x \leq \|x\|^2,$$

והוכיחו גם ש

$$\det(H) \geq 1,$$

ושוויון מתקיים אם ורק אם $B = 0$.

פתרון

נסמן $e = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. מתקיים הפירוק

$$A_n(a) = (1 - a)I + a e e^T,$$

שכן $e e^T$ היא מטריצה שכל כניסותיה שוות 1.

1. נשים לב כי $ee^T e = (e^T e)e = ne$ ולכן

$$A_n(a)e = (1-a)e + aee^T e = (1-a)e + ane = (1+(n-1)a)e,$$

כלומר e הוא וקטור עצמי עם ערך עצמי $\lambda_1 = 1 + (n-1)a$.

כעת יהי $x \in \mathbb{R}^n$ כך ש- $e^T x = 0$. אז $ee^T x = e(e^T x) = 0$ ולכן

$$A_n(a)x = (1-a)x + a \cdot 0 = (1-a)x.$$

מכאן שכל $x \in e^\perp \setminus \{0\}$ הוא וקטור עצמי עם ערך עצמי $\lambda_2 = 1 - a$. מאחר ש- $\mathbb{R}^n = \text{span}\{e\} \oplus e^\perp$, מצאנו את כל הערכים העצמיים. אם $a \neq 0$, אז $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ולכן

$$\lambda_1 = 1 + (n-1)a \quad \text{ברביובי אלגברי וגאומטרי},$$

$$\lambda_2 = 1 - a \quad \text{ברביובי אלגברי וגאומטרי}.$$

אם $a = 0$, אז $A_n(0) = I$, ולכן הערך העצמי היחיד הוא 1, ברביובי אלגברי וגאומטרי n .

2. המטריצה $A_n(a)$ סימטרית ממשית ולכן הרמיטית, ולכן היא חיובית מוגדרת אם ורק אם כל ערכיה העצמיים חיוביים ממש, וחיובית למחצה אם ורק אם כל ערכיה העצמיים אי שליליים. מתקבל:

$$A_n(a) \succ 0 \iff \begin{cases} 1-a > 0, \\ 1+(n-1)a > 0, \end{cases} \iff -\frac{1}{n-1} < a < 1,$$

וכן

$$A_n(a) \succeq 0 \iff \begin{cases} 1-a \geq 0, \\ 1+(n-1)a \geq 0, \end{cases} \iff -\frac{1}{n-1} \leq a \leq 1.$$

3. אם $a = 1$ אז $\lambda_2 = 0$ ברביובי $n-1$ ו- $\lambda_1 = n$. לכן

$$\text{rank}(A_n(1)) = 1, \quad \ker(A_n(1)) = e^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0\}.$$

אם $a = -\frac{1}{n-1}$ אז $\lambda_1 = 0$ ברביובי 1 ו- $\lambda_2 = 1 - a = \frac{n}{n-1} > 0$ ברביובי $n-1$. לכן

$$\text{rank}\left(A_n\left(-\frac{1}{n-1}\right)\right) = n-1, \quad \ker\left(A_n\left(-\frac{1}{n-1}\right)\right) = \text{span}\{e\}.$$

נעבור כעת ל- $H = B^*B + I$.

(4) יהי $x \in \mathbb{C}^n$ מתקיים

$$x^* H x = x^* (B^* B) x + x^* I x = \|Bx\|^2 + \|x\|^2.$$

לכן לכל x מתקיים $x^* H x \geq 0$, ולכל $x \neq 0$ מתקיים $x^* H x > 0$ משום ש- $\|x\|^2 > 0$. מכאן $H \succ 0$, ובפרט H הפיכה.

(5) מן הזהות $H = I + B^* B$ נובע $H - I = B^* B \succeq 0$, ולכן לכל x מתקיים $x^* H x \geq x^* I x = \|x\|^2$. נסמן $\lambda_{\min}$ את הערך העצמי המינימלי של H . מהאי שוויון הקודם נקבל $\lambda_{\min} \geq 1$. לכן כל ערך עצמי של H^{-1} הוא לכל היותר 1, ומכאן שלכל x מתקיים

$$x^* H^{-1} x \leq \|x\|^2.$$

כדי לקבל אי שוויון דטרמיננטה, נסמן את הערכים העצמיים של H ב- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. מן $H \succ 0$ נקבל $\lambda_i > 0$, ומן $\lambda_{\min} \geq 1$ נקבל $\lambda_i \geq 1$ לכל i . לכן

$$\det(H) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \geq 1.$$

שוויון מתקיים אם ורק אם $\lambda_i = 1$ לכל i , כלומר $H = I$, כלומר $B^* B = 0$. כעת $B^* B = 0$ גורר שלכל x מתקיים $\|Bx\|^2 = x^* B^* B x = 0$, ולכן $Bx = 0$ לכל x , כלומר $B = 0$.

תרגיל ממבחן

1. נעבוד במרחב $M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$. נגדיר

$$C = \text{diag}(1, 0, 1), \quad D = \text{diag}(1, 0, 0, 1),$$

וכן

$$W = \{X \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R}) : CXD = 0\}.$$

הוכיחו כי W הוא תת מרחב של $M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$.

2. נגדיר על $M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ את הפונקציה

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}(X^T Q Y), \quad Q = \text{diag}(1, 2, 3).$$

הוכיחו שזוהי מכפלה פנימית. בפרט, בדקו לינאריות במשתנה השני.

3. נעבור כעת למרחב $\mathbb{R}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. יהיו

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W = N(M), \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

חשבו את ההיטל האורתוגונלי $P_W(v)$.

פתרון

1. נגדיר $L : M_{3 \times 4}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ על ידי $L(X) = CXD$. לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ולכל X_1, X_2 מתקיים

$$\begin{aligned} L(\alpha X_1 + \beta X_2) &= C(\alpha X_1 + \beta X_2)D \\ &= \alpha CX_1 D + \beta CX_2 D \\ &= \alpha L(X_1) + \beta L(X_2). \end{aligned}$$

לכן L לינארית ו- $W = \ker L$, ולכן W הוא תת מרחב. אפשר לראות את התנאי גם ישירות: הכפל ב- C מאפס את השורה השנייה, והכפל ב- D מאפס את העמודות השנייה והשלישית. לכן

$$CXD = 0 \iff x_{11} = x_{14} = x_{31} = x_{34} = 0.$$

אלה תנאים לינאריים הומוגניים על כניסות X .

2. נסמן $Q = \text{diag}(q_1, q_2, q_3)$, כאשר $(q_1, q_2, q_3) = (1, 2, 3)$. אם $X = (x_{ij})$ ו- $Y = (y_{ij})$ אז חישוב איברי האלכסון נותן

$$\begin{aligned} (X^T Q Y)_{jj} &= \sum_{i=1}^3 x_{ij} q_i y_{ij}, \\ \langle X, Y \rangle &= \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^3 q_i x_{ij} y_{ij}. \end{aligned}$$

לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\begin{aligned} \langle X, \alpha Y + \beta Z \rangle &= \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^3 q_i x_{ij} (\alpha y_{ij} + \beta z_{ij}) \\ &= \alpha \langle X, Y \rangle + \beta \langle X, Z \rangle. \end{aligned}$$

זו לינאריות במשתנה השני. מאחר שהכניסות ממשיות, מתקבלת באותו אופן גם לינאריות במשתנה הראשון. כמו כן,

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^3 q_i y_{ij} x_{ij} = \langle Y, X \rangle,$$

ולכן מתקיימת סימטריה. לבסוף,

$$\langle X, X \rangle = \sum_{j=1}^4 (x_{1j}^2 + 2x_{2j}^2 + 3x_{3j}^2) \geq 0.$$

שוויון מתקיים אם ורק אם כל הכניסות x_{ij} אפס, כלומר אם ורק אם $X = 0$. הוכחנו לינאריות, סימטריה וחיוביות מוגדרת, ולכן זו מכפלה פנימית ממשית.

3. נפתור $Mx = 0$:

$$x_1 + x_3 = 0, \quad x_2 + x_4 = 0.$$

לכן

$$W = \text{span}\{w_1, w_2\}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

שני הווקטורים בלתי תלויים ואורתוגונליים, ומתקיים

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_2 \rangle &= 0, & \|w_1\|^2 &= \|w_2\|^2 = 2, \\ \langle v, w_1 \rangle &= 1 - 3 = -2, & \langle v, w_2 \rangle &= 2 - 4 = -2. \end{aligned}$$

לכן נוסחת ההטלה על בסיס אורתוגונלי נותנת

$$\begin{aligned} P_W(v) &= \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{\langle v, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 \\ &= -w_1 - w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

לבדיקה, $MP_W(v) = 0$, ואילו

$$v - P_W(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

מאונך גם ל- w_1 וגם ל- w_2 , כי $0 = 2 - 2$ ו- $0 = 3 - 3$. ההטלה אכן שייכת ל- W והשארית מאונכת לכל W .

תרגול 13: גראם שמידט ולכסון אורתוגונלי

עיקרון מנחה

נבנה בסיסים אורתונורמליים באמצעות החסרה שיטתית של היטלים, ונחשב היטלים במרחבי פולינומים. נכיר את תנאי הלכסון האורתוגונלי מעל הממשיים ואת הלכסון האוניטרי מעל המרוכבים, ונשתמש בבסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים כדי להוכיח נורמליות.

13.1 תזכורת וסימונים

תזכורת (מההרצאה)

לאורך התרגול נניח שמרחב המכפלה הפנימית הוא מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$, ושבמקרה המרוכב מתקיים:

$$1. \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ ולמעשה } \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$$

$$2. \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}.$$

$$3. \text{ לינאריות במשתנה הראשון: } \langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle.$$

מכאן מתקבלת לינאריות בהצמדה במשתנה השני: $\langle x, ay + bz \rangle = \bar{a}\langle x, y \rangle + \bar{b}\langle x, z \rangle$. זוהי אותה מוסכמה כמו בתרגול הקודם; מעל $\mathbb{R}$ אין הבדל בין שתי מוסכמות הלינאריות.

הגדרה פורמלית

יהי $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית.

$$1. \text{ נאמר שוקטורים } u, v \in V \text{ הם אורתוגונליים אם } \langle u, v \rangle = 0.$$

$$2. \text{ מערכת } (e_1, \dots, e_k) \text{ נקראת אורתונורמלית אם } \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \text{ לכל } i, j.$$

$$3. \text{ לכל } x \in V \text{ נגדיר את הנורמה } \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

תזכורת (מההרצאה)

נוסחת ההיטל האורתוגונלי על ישר: אם $u \neq 0$, אז הווקטור

$$\text{proj}_{\text{span}\{u\}}(v) := \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

הוא הווקטור היחיד מהצורה αu כך ש- $v - \alpha u \perp u$.

13.2 אלגוריתם גראם שמידט

נציג כעת את אלגוריתם גראם שמידט באופן שבו מנרמלים מיד בכל שלב, כלומר בונים ישירות מערכת אורתונורמלית.

יהיו $v_1, \dots, v_k \in V$ וקטורים בלתי תלויים לינארית. מגדירים רקורסיבית:

$$1. \text{ נגדיר } w_1 := v_1 \text{ ואז } e_1 := \frac{w_1}{\|w_1\|}.$$

2. עבור $j = 2, \dots, k$ מגדירים תחילה

$$w_j := v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle v_j, e_i \rangle e_i,$$

ואז מנרמלים

$$e_j := \frac{w_j}{\|w_j\|}.$$

הטענה המרכזית היא:

1. $(e_1, \dots, e_k)$ מערכת אורתונורמלית.

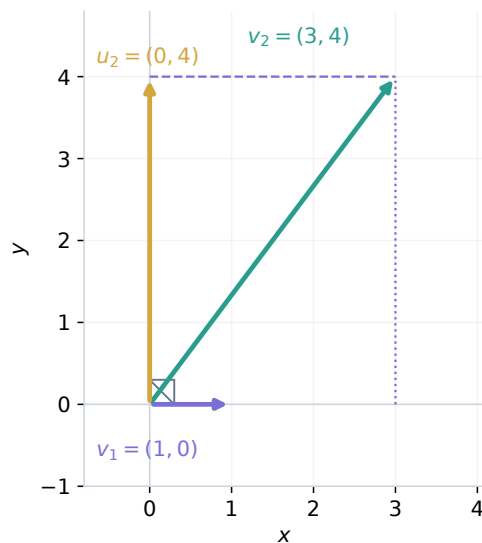
2. לכל m מתקיים $\text{span}\{v_1, \dots, v_m\} = \text{span}\{e_1, \dots, e_m\}$.

נימוק פורמלי: נניח באינדוקציה כי $e_1, \dots, e_{j-1}$ אורתונורמליים. לכל $r < j$ מתקיים

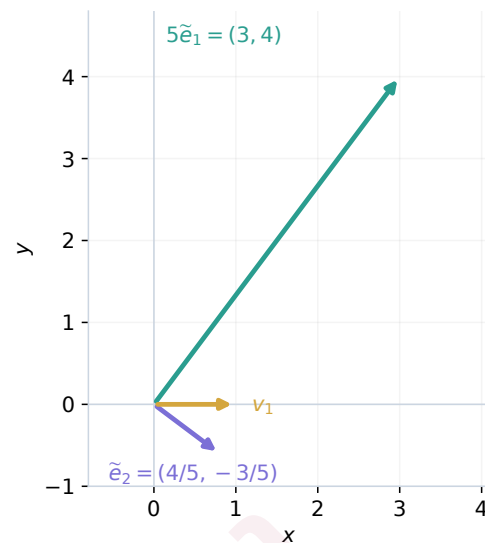
$$\begin{aligned} \langle w_j, e_r \rangle &= \left\langle v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle v_j, e_i \rangle e_i, e_r \right\rangle \\ &= \langle v_j, e_r \rangle - \sum_{i=1}^{j-1} \langle v_j, e_i \rangle \langle e_i, e_r \rangle \\ &= \langle v_j, e_r \rangle - \langle v_j, e_r \rangle = 0. \end{aligned}$$

אם $w_j = 0$, אז שייך למרחב הנפרש על ידי $e_1, \dots, e_{j-1}$, השווה באינדוקציה למרחב הנפרש על ידי $v_1, \dots, v_{j-1}$. זו סתירה לאי-תלות הקלט. לכן $w_j \neq 0$, הנרמול מותר ו- $\|e_j\| = 1$. כמו כן, $w_j \in \text{span}\{v_1, \dots, v_j\}$ ומנוסחת ההחסרה נובע $v_j \in \text{span}\{e_1, \dots, e_{j-1}, w_j\}$. מכאן שוויון המרחבים הנפרשים בכל שלב.

Remove the component along the first vector



Reversing the order changes the basis



בכל שלב מחסירים מן הווקטור הבא את רכיביו בכיוונים שכבר נבנו. השארית מאונכת לכיוונים הקודמים, ולאחר נרמול מתקבל וקטור היחידה הבא.

הפעילו את גראם שמידט, תוך נרמול בכל שלב, על הווקטורים

$$v_1 = (3, 4, 0)^T, \quad v_2 = (1, 3, 0)^T, \quad v_3 = (2, 1, 5)^T$$

ב- $\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הסטנדרטית. בדקו במפורש את אורתונורמליות הפלט.

פתרון

הנורמה הראשונה היא $\|v_1\| = \sqrt{9+16} = 5$ ולכן $e_1 = (3/5, 4/5, 0)^T$. מחשבים את ההיטל של v_2 :

$$\langle v_2, e_1 \rangle = \frac{3}{5} + \frac{12}{5} = 3,$$

$$w_2 = v_2 - 3e_1 = (1 - 9/5, 3 - 12/5, 0)^T = (-4/5, 3/5, 0)^T.$$

מאחר ש- $\|w_2\|^2 = 16/25 + 9/25 = 1$, מתקבל $e_2 = w_2$. כעת שני המקדמים עבור v_3 הם

$$\langle v_3, e_1 \rangle = 6/5 + 4/5 = 2, \quad \langle v_3, e_2 \rangle = -8/5 + 3/5 = -1.$$

לכן

$$w_3 = v_3 - 2e_1 - (-1)e_2 = (2 - 6/5 - 4/5, 1 - 8/5 + 3/5, 5)^T = (0, 0, 5)^T.$$

נורמתו 5, ולכן $e_3 = (0, 0, 1)^T$. הפלט הוא

$$e_1 = \frac{1}{5}(3, 4, 0)^T, \quad e_2 = \frac{1}{5}(-4, 3, 0)^T, \quad e_3 = (0, 0, 1)^T.$$

שתי הנורמות הראשונות הן $\sqrt{25/25} = 1$, והשלישית 1. המכפלה $\langle e_1, e_2 \rangle = (-12 + 12)/25 = 0$ ושתי המכפלות עם e_3 מתאפסות. קיבלנו בסיס אורתונורמלי עם רכיבים רציונליים בלבד.

ב- $\mathbb{C}^2$ עם $\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2}$ נתונים $v_1 = (3, 4i)^T$ ו- $v_2 = (1, i)^T$. בצעו גראם שמידט עם נרמול מידי, והקיפידו על ההצמדה במקדם ההיטל.

פתרון

ראשית $\|v_1\|^2 = 9 + |4i|^2 = 25$ ולכן $e_1 = (3, 4i)^T / 5$. במוסכמת הלינאריות במשתנה הראשון,

$$\langle v_2, e_1 \rangle = 1 \cdot \frac{3}{5} + i \cdot \frac{\overline{4i}}{5} = \frac{3}{5} + i \cdot \frac{-4i}{5} = \frac{7}{5}.$$

נחסר את ההיטל:

$$w_2 = v_2 - \frac{7}{5} e_1 = \left(1 - \frac{21}{25}, i - \frac{28i}{25} \right)^T = \frac{1}{25} (4, -3i)^T.$$

לפיכך $\|w_2\|^2 = (16 + 9)/625 = 1/25$, כלומר $\|w_2\| = 1/5$ ולכן $e_2 = (4, -3i)^T / 5$. בדיקה:

$$\|e_2\|^2 = \frac{16 + 9}{25} = 1, \quad \langle e_1, e_2 \rangle = \frac{3 \cdot 4 + (4i)(3i)}{25} = 0.$$

הפלט (e_1, e_2) אורתונורמלי. המכפלה $i\overline{4i} = -4i^2 = 4$ ממחישה מדוע ההצמדה חיונית.

נגדיר ב- $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ מכפלה פנימית על ידי

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(t) q(t) dt.$$

הפעילו את אלגוריתם גראם שמידט על $(v_1, v_2, v_3) = (1, t, t^2)$ והפיקו מערכת אורתונורמלית (e_1, e_2, e_3) , תוך נרמול מיד בכל שלב.

פתרון

1.

$$\|1\|^2 = \int_0^1 1 dt = 1 \Rightarrow e_1 = 1.$$

2. מחשבים

$$\langle t, e_1 \rangle = \int_0^1 1 \cdot t dt = \frac{1}{2}, \quad w_2 = t - \langle t, e_1 \rangle e_1 = t - \frac{1}{2}.$$

נורמה:

$$\|w_2\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{4} \right) dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

ולכן

$$e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{t - \frac{1}{2}}{\sqrt{1/12}} = 2\sqrt{3} \left(t - \frac{1}{2} \right).$$

3. מחשבים תחילה

$$\langle t^2, e_1 \rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

וכן

$$\langle t^2, e_2 \rangle = \int_0^1 2\sqrt{3} \left(t - \frac{1}{2} \right) t^2 dt = 2\sqrt{3} \int_0^1 \left(t^3 - \frac{1}{2} t^2 \right) dt = 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

לכן

$$\begin{aligned}
 w_3 &= t^2 - \langle t^2, e_1 \rangle e_1 - \langle t^2, e_2 \rangle e_2 \\
 &= t^2 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 2\sqrt{3} \left(t - \frac{1}{2} \right) \\
 &= t^2 - \frac{1}{3} - \left(t - \frac{1}{2} \right) \\
 &= t^2 - t + \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

נורמה:

$$\begin{aligned}
 \|w_3\|^2 &= \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6} \right)^2 dt \\
 &= \int_0^1 \left(t^4 - 2t^3 + \frac{4}{3}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{36} \right) dt \\
 &= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{1}{180},
 \end{aligned}$$

ומכאן

$$\|w_3\| = \sqrt{\frac{1}{180}} = \frac{1}{6\sqrt{5}}.$$

ולכן

$$e_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = 6\sqrt{5} \left(t^2 - t + \frac{1}{6} \right).$$

לסיכום:

$$e_1 = 1, \quad e_2 = 2\sqrt{3} \left(t - \frac{1}{2} \right), \quad e_3 = 6\sqrt{5} \left(t^2 - t + \frac{1}{6} \right).$$

ב- $\mathbb{R}^2$ השוו את פלט גראם שמידט עבור שני הסדרים (v_1, v_2) ו- (v_2, v_1) , כאשר $v_1 = (1, 0)^T$ ו- $v_2 = (3, 4)^T$. הסבירו מה נשאר זהה למרות שינוי הפלט.

פתרון

בסדר הראשון מתקבל $e_1 = (1, 0)^T$. מקדם ההיטל הוא $\langle v_2, e_1 \rangle = 3$, ולכן

$$w_2 = (3, 4)^T - 3(1, 0)^T = (0, 4)^T, \quad e_2 = (0, 1)^T.$$

בסדר ההפוך מתחילים ב- $\tilde{e}_1 = (3, 4)^T/5$. מקדם ההיטל של v_1 עליו הוא $3/5$, ולכן

$$\tilde{w}_2 = (1, 0)^T - \frac{3}{5} \frac{1}{5} (3, 4)^T = \left(\frac{16}{25}, -\frac{12}{25} \right)^T.$$

הנורמה היא $4/5$. $\sqrt{256 + 144}/25 = 20/25 = 4/5$. נרמול נותן

$$\tilde{e}_2 = (4/5, -3/5)^T.$$

לכן הסדר הראשון נותן את הבסיס הסטנדרטי, והשני נותן את $((3/5, 4/5)^T, (4/5, -3/5)^T)$. שניהם אורתונורמליים ופורשים את אותו מישור. בכל שלב נשמרת פרישת קידומת הקלט, אך שינוי סדר הקלט משנה את הכיוון הראשון ולכן יכול לשנות את כל הפלט.

יהי $V = \mathbb{C}_3[x]$ מרחב הפולינומים מעל $\mathbb{C}$ מדרגה לכל היותר 3. נגדיר עבור $f, g \in V$:

$$\langle f, g \rangle := f(-1)\overline{g(-1)} + f(0)\overline{g(0)} + f(1)\overline{g(1)} + f(2)\overline{g(2)}.$$

1. הוכיחו שזוהי מכפלה פנימית על V .

2. נגדיר $W = \mathbb{C}_2[x] \subseteq V$. מצאו בסיס אורתונורמלי של W .

3. מצאו את $W^\perp$.

פתרון

1. נבדוק אקסיומות.

(א) חיוביות: לכל $f \in V$ מתקיים

$$\langle f, f \rangle = \sum_{t \in \{-1, 0, 1, 2\}} f(t)\overline{f(t)} = \sum_{t \in \{-1, 0, 1, 2\}} |f(t)|^2 \geq 0.$$

אם $\langle f, f \rangle = 0$ אז $f(-1) = f(0) = f(1) = f(2) = 0$. לפולינום שאינו אפס ממעלה ≤ 3 יש לכל היותר 3 אפסים שונים, לכן בהכרח $f \equiv 0$.

(ב) סימטריות צמודה: לכל $f, g \in V$

$$\overline{\langle g, f \rangle} = \overline{\sum_t g(t)\overline{f(t)}} = \sum_t \overline{g(t)} f(t) = \langle f, g \rangle.$$

(ג) לינאריות במשתנה הראשון: לכל $f, g, h \in V$ ולכל $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \langle \alpha f + \beta g, h \rangle &= \sum_t (\alpha f(t) + \beta g(t)) \overline{h(t)} \\ &= \alpha \sum_t f(t) \overline{h(t)} + \beta \sum_t g(t) \overline{h(t)} \\ &= \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle. \end{aligned}$$

מכאן זוהי מכפלה פנימית על V .

2. נפעיל גראם שמידט על $(1, x, x^2)$ וננרמל בכל שלב. נסמן $v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2$.

ראשית

$$\|v_1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = 1 + 1 + 1 + 1 = 4, \quad e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{2}.$$

כעת

$$\langle v_2, e_1 \rangle = \left\langle x, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}((-1) + 0 + 1 + 2) = 1, \quad w_2 = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 = x - \frac{1}{2}.$$

נחשב נורמה:

$$\begin{aligned} \|w_2\|^2 &= \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = 5. \end{aligned}$$

לכן

$$e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{5}}.$$

כעת

$$\langle v_3, e_1 \rangle = \left\langle x^2, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}(1 + 0 + 1 + 4) = 3,$$

וכן

$$\begin{aligned} \langle v_3, e_2 \rangle &= \left\langle x^2, \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{5}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(-\frac{3}{2} \right) \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot 0 + \left(\frac{1}{2} \right) \cdot 1 + \left(\frac{3}{2} \right) \cdot 4 \right) \\ &= \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

לכן

$$w_3 = v_3 - \langle v_3, e_1 \rangle e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle e_2 = x^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} - \sqrt{5} \cdot \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{5}} = x^2 - x - 1.$$

נחשב נורמה:

$$\|w_3\|^2 = 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 = 4, \quad e_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{x^2 - x - 1}{2}.$$

קיבלנו בסיס אורתונורמלי ל- W :

$$e_1 = \frac{1}{2}, \quad e_2 = \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{5}}, \quad e_3 = \frac{x^2 - x - 1}{2}.$$

3. מאחר ש- $\dim V = 4$ ו- $\dim W = 3$, נקבל $\dim(W^\perp) = 1$. נסמן $p \in W^\perp$ ונכתוב את ערכיו בנקודות:

$$A = p(-1), \quad B = p(0), \quad C = p(1), \quad D = p(2).$$

הדרישה $p \perp W$ שקולה לכך שלכל $q \in \{1, x, x^2\}$ מתקיים $\langle p, q \rangle = 0$, כלומר

$$A + B + C + D = 0, \quad (-1)A + 0 \cdot B + 1 \cdot C + 2D = 0, \quad 1 \cdot A + 0 \cdot B + 1 \cdot C + 4D = 0.$$

פתרון המערכת נותן וקטור ערכים פרופורציונלי ל- $(-1, 3, -3, 1)$, כלומר נוכל לבחור

$$p(-1) = -1, \quad p(0) = 3, \quad p(1) = -3, \quad p(2) = 1.$$

נמצא פולינום מדרגה ≤ 3 בעל ערכים אלו: נכתוב $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. מן $p(0) = 3$ נקבל $d = 3$, ובנוסף

$$p(1) = -3 \implies a + b + c = -6,$$

$$p(-1) = -1 \implies -a + b - c = -4,$$

$$p(2) = 1 \implies 8a + 4b + 2c = -2.$$

מן שתי הראשונות נקבל $b = -5$, ומכאן $a + c = -1$. מן השלישית מתקבל $4a + 2b + c = -1$, ולכן $4a - 10 + c = -1$, כלומר $4a + c = 9$. חיסור נותן $3a = 10$, ולכן

$$a = \frac{10}{3}, \quad c = -\frac{13}{3}, \quad d = 3, \quad b = -5.$$

נכפיל ב-3 כדי להימנע משברים, ונקבל וקטור פורש:

$$u(x) := 10x^3 - 15x^2 - 13x + 9.$$

לכן

$$W^\perp = \text{span}\{u\}.$$

אם רוצים גם וקטור יחידה, אז $\|u\|^2 = |-3|^2 + |9|^2 + |-9|^2 + |3|^2 = 180$, ולכן

$$\frac{u}{6\sqrt{5}}$$

הוא בסיס אורתונורמלי ל- $W^\perp$.

נמשיך עם $V = \mathbb{C}_3[x]$ ועם המכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = f(-1)\overline{g(-1)} + f(0)\overline{g(0)} + f(1)\overline{g(1)} + f(2)\overline{g(2)},$$

וניקח $W = \mathbb{C}_2[x]$.

נסמן ב- $P_W : V \rightarrow W$ את ההטלה האורתוגונלית על W .

1. הוכיחו ש- P_W לינארית, וש- $P_W^2 = P_W$.

2. חשבו במפורש את $P_W(x^3)$ בעזרת בסיס אורתונורמלי של W שמצאתם בסעיף הקודם.

3. נגדיר העתקה $T : V \rightarrow V$ על ידי

$$(Tf)(x) := f(x+1) - f(x).$$

מצאו את כל הפולינומים $q \in W$ שעבורם $T(q) \in W^\perp$. האם הפתרון יחיד? מצאו גם את הפתרון היחיד המקיים $\langle q, 1 \rangle = 1$, ובדקו האם התנאי $\|q\| = 1$ היה מבטיח יחידות.

פתרון

נשתמש בבסיס האורתונורמלי של W :

$$e_1 = \frac{1}{2}, \quad e_2 = \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{5}}, \quad e_3 = \frac{x^2 - x - 1}{2}.$$

1. לכל $f \in V$ מתקיים פירוק אורתוגונלי יחיד $f = w + u$ עם $w \in W$ ו- $u \in W^\perp$. מגדירים $P_W(f) := w$. לינאריות: אם $f = w + u$ ו- $g = w' + u'$ עם $w, w' \in W$ ו- $u, u' \in W^\perp$, אז

$$\alpha f + \beta g = (\alpha w + \beta w') + (\alpha u + \beta u')$$

כאשר $\alpha w + \beta w' \in W$ ו- $\alpha u + \beta u' \in W^\perp$, ולכן

$$P_W(\alpha f + \beta g) = \alpha w + \beta w' = \alpha P_W(f) + \beta P_W(g).$$

בנוסף, אם $f = w + u$ אז $P_W(f) = w \in W$, ומכאן $P_W(P_W(f)) = P_W(w) = w$, כלומר $P_W^2 = P_W$.

2. מאחר ש- e_1, e_2, e_3 אורתונורמליים, לכל $f \in V$:

$$P_W(f) = \sum_{i=1}^3 \langle f, e_i \rangle e_i.$$

נחשב עבור $f(x) = x^3$.

ראשית,

$$\langle x^3, e_1 \rangle = \left\langle x^3, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}((-1)^3 + 0^3 + 1^3 + 2^3) = \frac{1}{2}(-1 + 0 + 1 + 8) = 4.$$

שנית,

$$\langle x^3, e_2 \rangle = \left\langle x^3, \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{5}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{t \in \{-1, 0, 1, 2\}} (t - \frac{1}{2}) t^3.$$

נחשב סכום:

$$t = -1: \quad \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (-1) = \frac{3}{2},$$

$$t = 0: \quad \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 = 0,$$

$$t = 1: \quad \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1 = \frac{1}{2},$$

$$t = 2: \quad \left(\frac{3}{2}\right) \cdot 8 = 12.$$

ולכן הסכום הוא 14, ומתקבל

$$\langle x^3, e_2 \rangle = \frac{14}{\sqrt{5}}.$$

שלישית,

$$\langle x^3, e_3 \rangle = \left\langle x^3, \frac{x^2 - x - 1}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \sum_t (t^2 - t - 1) t^3.$$

נחשב:

$$\begin{aligned} t = -1: & (1 + 1 - 1) \cdot (-1) = -1, \\ t = 0: & (-1) \cdot 0 = 0, \\ t = 1: & (1 - 1 - 1) \cdot 1 = -1, \\ t = 2: & (4 - 2 - 1) \cdot 8 = 8. \end{aligned}$$

ולכן הסכום הוא 6, ומתקבל

$$\langle x^3, e_3 \rangle = 3.$$

מכאן

$$P_W(x^3) = 4e_1 + \frac{14}{\sqrt{5}}e_2 + 3e_3 = 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{14}{\sqrt{5}} \cdot \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{5}} + 3 \cdot \frac{x^2 - x - 1}{2}.$$

כלומר

$$P_W(x^3) = 2 + \frac{14}{5} \left(x - \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{2}(x^2 - x - 1) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{10}x - \frac{9}{10}.$$

3. ראינו ש- $W^\perp = \text{span}\{u\}$ כאשר

$$u(x) = 10x^3 - 15x^2 - 13x + 9.$$

נחפש $q \in W$ כך ש- $T(q) \in W^\perp$, כלומר קיים $\lambda \in \mathbb{C}$ כך ש

$$T(q) = \lambda u.$$

$$q(x) = ax^2 + bx + c \text{ נכתוב}$$

נחשב:

$$q(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c = ax^2 + (2a+b)x + (a+b+c),$$

ולכן

$$(Tq)(x) = q(x+1) - q(x) = 2ax + (a+b).$$

כלומר $T(q)$ הוא פולינום מדרגה לכל היותר 1.

מאידך, אם $T(q) \in W^\perp$ אז $T(q) \in W^\perp \cap W$ (כי $T(q) \in W$ בהיותו ממעלה ≤ 1). אבל $W \cap W^\perp = \{0\}$, ולכן בהכרח

$$T(q) = 0.$$

מכאן

$$2ax + (a+b) \equiv 0 \Rightarrow 2a = 0, \quad a+b = 0 \Rightarrow a = 0, \quad b = 0.$$

ולכן $q(x) = c$ קבוע.

כעת $T(q) = 0 \in W^\perp$ לכל קבוע, ולכן כל $q = c$ הוא פתרון. לכן ללא תנאי נוסף הפתרון אינו יחיד. תחת התנאי $\langle q, 1 \rangle = 1$ מתקבל $4c = 1$, ולכן הפתרון היחיד הוא $q = \frac{1}{4}$. לעומת זאת, התנאי $\|q\| = 1$ אינו מבטיח יחידות. עבור $q = c$ מתקיים:

$$\|q\|^2 = \langle c, c \rangle = |c|^2 + |c|^2 + |c|^2 + |c|^2 = 4|c|^2,$$

ולכן $\|q\| = 1 \Rightarrow |c| = \frac{1}{2}$. בממשיים נקבל שתי אפשרויות $c = \pm \frac{1}{2}$, ובמרוכבים אינסוף אפשרויות עם מודולוס $\frac{1}{2}$.

תרגיל ממבחן

יהי $V = \mathbb{R}_4[x]$, מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה לכל היותר 4, כולל פולינום האפס. נגדיר $L : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ על ידי

$$L(p) = (p(0), p(1), p'(1)).$$

נתונה על V המכפלה הפנימית

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t) dt + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

נסמן $W = \ker L$ ו- $s(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$.

1. הוכיחו ש- L היא העתקה ליניארית.
2. חשבו את $\ker L$ ואת $\operatorname{Im} L$, ומצאו בסיס לכל אחד מהם.
3. חשבו את ההיטל האורתוגונלי $P_W(s)$ ביחס למכפלה הפנימית הנתונה.

פתרון

1. יהיו $p, q \in V$ ו- $a, b \in \mathbb{R}$. מהליניאריות של הצבה ושל נגזרת,

$$\begin{aligned} L(ap + bq) &= ((ap + bq)(0), (ap + bq)(1), (ap + bq)'(1)) \\ &= (ap(0) + bq(0), ap(1) + bq(1), ap'(1) + bq'(1)) \\ &= aL(p) + bL(q). \end{aligned}$$

לכן L ליניארית.

2. התנאי $p \in \ker L$ שקול לשלושת התנאים

$$p(0) = 0, \quad p(1) = 0, \quad p'(1) = 0.$$

הראשון אומר ש- x מחלק את p . שני האחרונים אומרים ש-1 הוא שורש בריבוי לפחות 2: אם $p(x) = (x-1)q(x)$, אז $p'(x) = q(x) + (x-1)q'(x)$, ולכן $p'(1) = q(1)$. לפיכך $(x-1)^2$ מחלק את p . מאחר ש- x ו- $(x-1)^2$ זרים, ומעלת p לכל היותר 4, מתקבל

$$W = \{x(x-1)^2(a+bx) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

נגדיר

$$w_1 = x(x-1)^2 = x^3 - 2x^2 + x, \quad w_2 = x^2(x-1)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2.$$

הפולינומים w_1, w_2 פורשים את W והם בלתי-תלויים, למשל משום שמעלותיהם שונות. לכן (w_1, w_2) הוא בסיס ל- W , ו- $\dim W = 2$.

כדי לחשב את התמונה נציג פולינומים הנשלחים לשלושת וקטורי הבסיס הסטנדרטי:

$$h_1 = (x-1)^2, \quad h_2 = 2x - x^2, \quad h_3 = x^2 - x.$$

חישוב ישיר נותן

$$L(h_1) = (1, 0, 0), \quad L(h_2) = (0, 1, 0), \quad L(h_3) = (0, 0, 1).$$

לכן $\operatorname{Im} L = \mathbb{R}^3$, ובסיס לתמונה הוא הבסיס הסטנדרטי. לבדיקת הממדים, $\dim \ker L + \dim \operatorname{Im} L = 2 + 3 = 5 = \dim V$.

3. נחפש $p = P_W(s)$ בצורה $p = aw_1 + bw_2$. הגדרת ההטלה דורשת $p \in W$ ו- $s - p \in W^\perp$. מכיוון ש- w_1, w_2 בסיס של W , די לדרוש

$$\langle s - p, w_1 \rangle = 0, \quad \langle s - p, w_2 \rangle = 0.$$

לכל $w \in W$ מתקיים $w(1) = w(0) = 0$, ולכן איברי הקצה במכפלה הפנימית מתאפסים בכל המכפלות שבהן אחד הגורמים הוא w_1 או w_2 . נחשב תחילה את מכפלות הבסיס:

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_1 \rangle &= \int_0^1 (t^2 - 4t^3 + 6t^4 - 4t^5 + t^6) dt \\ &= \frac{1}{3} - 1 + \frac{6}{5} - \frac{2}{3} + \frac{1}{7} = \frac{1}{105}, \\ \langle w_1, w_2 \rangle &= \int_0^1 (t^3 - 4t^4 + 6t^5 - 4t^6 + t^7) dt \\ &= \frac{1}{4} - \frac{4}{5} + 1 - \frac{4}{7} + \frac{1}{8} = \frac{1}{280}, \\ \langle w_2, w_2 \rangle &= \int_0^1 (t^4 - 4t^5 + 6t^6 - 4t^7 + t^8) dt \\ &= \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + \frac{6}{7} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} = \frac{1}{630}. \end{aligned}$$

לאחר כפל הפולינומים מתקבלים גם

$$\begin{aligned} \langle s, w_1 \rangle &= \int_0^1 (t^7 - t^6 - t^2 + t) dt = \frac{1}{8} - \frac{1}{7} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{25}{168}, \\ \langle s, w_2 \rangle &= \int_0^1 (t^8 - t^7 - t^3 + t^2) dt = \frac{1}{9} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{5}{72}. \end{aligned}$$

לפיכך תנאי האורתוגונליות הם

$$\begin{pmatrix} 1/105 & 1/280 \\ 1/280 & 1/630 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25/168 \\ 5/72 \end{pmatrix}.$$

כפל ב-2520 נותן את המערכת

$$24a + 9b = 375, \quad 9a + 4b = 175.$$

נכפיל את המשוואה הראשונה ב-4 ואת השנייה ב-9 ונחסר:

$$(96a + 36b) - (81a + 36b) = 1500 - 1575 \implies 15a = -75.$$

לכן $a = -5$, ומהמשוואה השנייה $-45 + 4b = 175$, כלומר $b = 55$. מסקנתנו היא

$$\begin{aligned} P_W(s) &= -5x(x-1)^2 + 55x^2(x-1)^2 \\ &= 55x^4 - 115x^3 + 65x^2 - 5x. \end{aligned}$$

הפולינום אכן שייך ל- W לפי הפירוק בשורה הראשונה, ושתי משוואות המכפלה הפנימית מבטיחות שההפרש מ- s מאונך לכל W . אלו בדיוק שני התנאים המאפיינים באופן יחיד את ההטלה האורתוגונלית.

13.3 העתקה צמודה, נורמליות ולכסון בבסיס אורתונורמלי

הגדרה פורמלית

יהי V מרחב מכפלה פנימית מממד סופי, ויהי $T : V \rightarrow V$ לינארי. **ההעתקה הצמודה** T^* היא ההעתקה היחידה המקיימת

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle \quad \text{לכל } v, w \in V.$$

בבסיס אורתונורמלי, אם A מייצגת את T , אז $A^* = \overline{A}^T$ מייצגת את T^* . נאמר ש- T **צמודה לעצמה** אם $T^* = T$, ושהיא **נורמלית** אם $TT^* = T^*T$. מטריצה $U \in M_n(\mathbb{C})$ נקראת **אוניטרית** אם $U^*U = UU^* = I$; עמודותיה הן בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^n$. במקרה הממשי, מטריצה Q נקראת **אורתוגונלית** אם $Q^TQ = QQ^T = I$.

13.8. טענה

במרחב מכפלה פנימית מממד סופי מעל $\mathbb{C}$, לכל העתקה צמודה לעצמה יש בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים, וכל ערכיה העצמיים ממשיים. זוהי גרסת המשפט הספקטרלי להעתקה צמודה לעצמה. לכן לכל מטריצה הרמיטית $A = A^*$ קיימת מטריצה אוניטרית U ומטריצה אלכסונית ממטית D כך ש

$$U^*AU = D, \quad A = UDU^*.$$

עמודה j של U היא וקטור עצמי של A השייך לאיבר d_{jj} . מעל $\mathbb{R}$, לכל מטריצה סימטרית ממטית $A = A^T$ קיים בסיס אורתונורמלי ממשי של וקטורים עצמיים, ולכן קיימת מטריצה אורתוגונלית Q כך ש

$$Q^TAQ = D, \quad A = QDQ^T.$$

לכסון באמצעות מטריצה אורתוגונלית נקרא **לכסון אורתוגונלי**; מעל המרוכבים נשתמש במונח **לכסון אוניטרי**.

תזכורת (מההרצאה)

כדי למצוא לכסון אורתוגונלי של מטריצה סימטרית ממטית, מוצאים בסיס לכל מרחב עצמי, מפעילים גראם שמידט בתוך כל מרחב עצמי לפי הצורך, ומנרמלים. וקטורים עצמיים של מטריצה סימטרית השייכים לערכים עצמיים שונים כבר מאונכים זה לזה. מסדרים את וקטורי היחידה כעמודות Q , ובאותו סדר מסדרים את הערכים העצמיים באלכסון D . מעל המרוכבים אותה בנייה תקפה למטריצה הרמיטית, עם U^* במקום Q^T .

יהי V מרחב מכפלה פנימית מממד סופי מעל $\mathbb{C}$, ותהי $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית. נתון שכל וקטור עצמי של $T + T^*$ הוא גם וקטור עצמי של $T - T^*$. הוכיחו ש- T נורמלית.

פתרון

נסמן

$$H := T + T^*, \quad K := T - T^*.$$

המטרה היא למצוא בסיס אורתונורמלי שבו שתי ההעתקות פועלות בכפל בסקלר על כל וקטור בסיס. ראשית נבדוק את הצמודות:

$$H^* = (T + T^*)^* = T^* + (T^*)^* = T^* + T = H,$$

וכן

$$K^* = (T - T^*)^* = T^* - (T^*)^* = T^* - T = -K.$$

לכן H צמודה לעצמה. אם $V = \{0\}$, הטענה מידית. אחרת, לפי המשפט הספקטרלי קיימים בסיס אורתונורמלי $B = (e_1, \dots, e_n)$ ומספרים ממשיים $h_1, \dots, h_n$ כך ש

$$He_j = h_j e_j \quad (1 \leq j \leq n).$$

כל e_j הוא וקטור עצמי של H , ולכן לפי הנתון קיים $k_j \in \mathbb{C}$ כך ש

$$Ke_j = k_j e_j.$$

המספר k_j רשאי להיות תלוי ב- j ; אין צורך להניח שערכי העצמי של H שונים. בבסיס B שתי המטריצות אלכסוניות:

$$[H]_B = D_H := \text{diag}(h_1, \dots, h_n), \quad [K]_B = D_K := \text{diag}(k_1, \dots, k_n).$$

לכל j מתקיים

$$HKe_j = H(k_j e_j) = k_j h_j e_j, \quad KHe_j = K(h_j e_j) = h_j k_j e_j.$$

הסקלרים מתחלפים, ולכן $HKe_j = KHe_j$ לכל איבר בסיס. מכאן $HK = KH$ על V כולו. כעת נבודד את T ואת T^* :

$$H + K = 2T, \quad H - K = 2T^*, \quad T = \frac{H + K}{2}, \quad T^* = \frac{H - K}{2}.$$

נחשב בנפרד את שתי המכפלות, בלי להניח מראש שהגורמים מתחלפים:

$$\begin{aligned} TT^* &= \frac{1}{4}(H + K)(H - K) \\ &= \frac{1}{4}(HH - HK + KH - KK) \\ &= \frac{1}{4}(H^2 - HK + KH - K^2) \\ &= \frac{1}{4}(H^2 - K^2), \end{aligned}$$

כאשר בשורה האחרונה השתמשנו ב- $HK = KH$. באופן דומה,

$$\begin{aligned} T^*T &= \frac{1}{4}(H - K)(H + K) \\ &= \frac{1}{4}(HH + HK - KH - KK) \\ &= \frac{1}{4}(H^2 + HK - KH - K^2) \\ &= \frac{1}{4}(H^2 - K^2). \end{aligned}$$

קיבלנו $TT^* = T^*T$, ולכן T נורמלית.

נבחר גם את הקשר ללכסון אוניטרי ואת סדר המטריצות. נבחר תחילה בסיס אורתונורמלי קבוע של V , נסמן $A = [T]$ בבסיס זה, ונבנה את U מעמודות הקואורדינטות של $e_1, \dots, e_n$ באותו בסיס. אז U אוניטרית, ומתקיים

$$U^*(A + A^*)U = D_H, \quad U^*(A - A^*)U = D_K.$$

מחיבור שתי הזהויות וחלוקה ב-2 נקבל

$$U^*AU = D := \frac{1}{2}(D_H + D_K), \quad A = UDU^*.$$

לכן $[T]_B = D$ וגם $[T^*]_B = D^*$. עבור מטריצות אלכסוניות,

$$(DD^*)_{ij} = \sum_{\ell=1}^n d_{i\ell} \overline{d_{j\ell}} = \begin{cases} |d_{ii}|^2, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

וכן

$$(D^*D)_{ij} = \sum_{\ell=1}^n \overline{d_{\ell i}} d_{\ell j} = \begin{cases} |d_{ii}|^2, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

מכאן אפשר לבדוק שוב במטריצות:

$$AA^* = (UDU^*)(UD^*U^*) = UD(U^*U)D^*U^* = U(DD^*)U^*,$$

$$A^*A = (UD^*U^*)(UDU^*) = UD^*(U^*U)DU^* = U(D^*D)U^*.$$

שתי התוצאות שוות. במילים פשוטות, הבסיס שמלכסן את החלק הצמוד לעצמו מלכסן, בזכות הנתון, גם את החלק השני; לכן הוא מלכסן גם את T עצמה.

לוגיקה ושיטות הוכחה

א' 1. לוגיקה

החלק הבא הוא בסיס לתחום הלוגיקה במתמטיקה. נכיר פסוקים, כמתים וקשרים לוגיים, ונראה כיצד משתמשים בהם לבניית הוכחות ולבדיקת טענות.

א' 1.1 פסוקים

פסוק הוא אמירה שניתן לשייך לה ערך "אמת" או "שקר" בצורה חד משמעית. דוגמאות של פסוקים:

- פריז היא בירת צרפת. (זהו פסוק אמת.)

- $0 = 1$ (זהו פסוק שקר.)

כמות גרגירי החול על כדור הארץ עולה על 10^{25} . אנחנו אמנם לא יודעים מה ערך האמת של הטענה הזו, ויהיה די קשה לבדוק, אבל למרות אי-הידיעה שלנו, טענה זו היא עדיין נכונה או שקרית. דוגמאות לדברים שאינם פסוקים:

- מה שלומך? (שאלה איננה פסוק.)

- לך לישון! (ציווי איננו פסוק.)

- $x^2 > x$ (לא ניתן לייחס "אמת" או "שקר" כי אין נתונה משמעות ל- x .)

המשפט "מונה ליזה היא ציור יפה" מבטא הערכה סובייקטיבית. כדי להתייחס אליו כפסוק פורמלי יש לקבוע תחילה משמעות מדויקת למילה "יפה". בלוגיקה המתמטית אנו עובדים עם היגדים שמשמעותם ותחום הדיון שלהם מוגדרים.

א' 1.2 כמתים

- שימו לב לאמירה הבאה: "הוא ראש הממשלה". אמירה זו איננה פסוק – צריך לדעת במי מדובר! כמו כן, אמירה כמו $n > 2$ איננה פסוק כי לא ניתן לשייך לה ערך "אמת" או "שקר", היות ולא ידוע מהו n . לצורך כך, יש לנו עוד שני סימנים לוגיים שנקראים **כמתים**, המופיעים עם משתנים בפסוקים:

תזכורת (מההרצאה)

- לכל (מסומן $\forall$) – לדוגמה, הפסוק "כל מספר טבעי הוא גדול מ-2" נכתב $\forall n \in \mathbb{N} (n > 2)$.

- קיים (מסומן $\exists$) - לדוגמה, הפסוק "קיים מספר טבעי שגדול מ-2" נכתב $\exists n \in \mathbb{N} (n > 2)$.

יש לציין את תחום הכימות, במפורש או מתוך הקשר מוגדר. שימו לב למה זה חשוב:

- שימו לב לבעיה בטענה הבאה: $\forall x \ x^2 \geq x$. אין לנו לכאורה מידע על x : לא בהכרח מוגדר ואפילו אם כן, לא בהכרח ניתן בכלל להשוות בין x ל- x^2 . בלי תחום דיון מוסכם הניסוח אינו שלם. לעומת זאת, הטענות הבאות הן פסוקים, כי מצוין בהן תחום המשתנה:
 - $\forall x \in \mathbb{N} \ x^2 \geq x$ - זהו פסוק אמת, כי אכן $x^2 \geq x$ לכל x טבעי.
 - $\forall x \in \mathbb{Q} \ x^2 \geq x$ - זהו פסוק שקר כי אם נבחר $x = \frac{1}{2}$ נקבל טענה שאינה נכונה, ולכן הטענה השנייה שקרית.

כתבו את הטענה הבאה בשפה מתמטית: קבוצה מוכלת בקבוצה אחרת אמ"מ כל איבר בה שייך גם לקבוצה השנייה

פתרון

$$A \subseteq B \iff \forall a \in A, a \in B$$

קשרים לוגיים: וגם, או, שלילה

וגם ($\wedge$): שני התנאים מתקיימים.

- לדוגמה: אם נרצה לכתוב ש"אוטו שלנו גדול וירוק", למעשה אנחנו אומרים ש"האוטו שלנו גדול" וגם ש"האוטו שלנו ירוק". מתי טענה זו נכונה, ומתי שקרית? ; כדי שיהיה **אמת**, נבדוק אם האוטו גדול וגם ירוק. אם באחד הבדיקות קיבלנו תשובת **שקר**, אזי כל המשפט כולו שקרי.

טבלת אמת: הטבלה מציגה את ערך האמת של $A \wedge B$ עבור כל שילוב אפשרי של A, B .

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

או ($\vee$): פירוש, "או" לוגי.

- $A \vee B$ הוא פסוק שמקבל ערך אמת אם לפחות אחד מן A, B אמת; אם שניהם שקר; ה"או" הוא שקר. זהו ה"או" **כולל** (inclusive).

טבלת אמת:

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

שלילה) - ; הפיכת אמת לשקר ולהפך.

- לדוגמה: הפסוק "כל מלבן הוא מקבילית". אם נרצה את שלילתו נקבל "לא כל מלבן הוא מקבילית", כלומר קיים מלבן שאינו מקבילית. בכלל, ערכי האמת של פסוק ושלילתו הפוכים זה לזה: אם אחד אמת; השני שקר, ולהפך.

טבלת אמת:

A	$\neg A$
T	F
F	T

כתבו את הפסוק ושלילתו באמצעות כמתים לוגיים קיים M טבעי כך שלכל n טבעי מתקיים כי $n \leq M$

פתרון

בשפה מתמטית

$$\exists M \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \leq M$$

שלילה: $\forall M \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}, n > M$

גרירה) $\Rightarrow$ (ושקילות) $\Leftrightarrow$

גרירה) $\Rightarrow$ (- פירוש: אם... אז... לדוגמה, נבחן את הטענה "אם יוסי קיבל ציון סופי של 70 ומעלה, אז יוסי עבר את הקורס". נסמן ב- A את ההנחה וב- B את המסקנה.

- A אמת ו- B אמת: הגרירה אמת.
- A אמת ו- B שקר: הגרירה שקר.
- A שקר ו- B אמת: הגרירה אמת.
- A שקר ו- B שקר: הגרירה אמת.

אין כאן קביעה על מדיניות הציונים בקורס מסוים, אלא המחשה של משמעות הגרירה בלבד. הפסוק מקבל ערך **שקר** רק כאשר A (החלק הראשון) אמת, ו- B (החלק השני) שקר. בכל מקרה אחר, הפסוק נחשב אמת.

טבלת אמת:

A	B	$A \Rightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

דוגמה: שימו לב לפסוק $0 = 1 \Rightarrow 2 = 3$. למרות שהשמאלי הוא שקר, זהו פסוק **אמת**, כי ההנחה שקרית, גם כאשר המסקנה שקרית.

הערות חשובות: כאשר נבחן היגדים כמו "אם P אז Q " נרצה לבדוק מתי P מתקיים, האם זה גורר Q . בשפה יומיומית משתמשים ב"אם... אז..." במשמעות סיבתית ("אם תאכל, תשבע") אך בלוגיקה פורמלית זו משמעות **טכנית בלבד. השלילה של טענה מהצורה:**

$$P \Rightarrow Q$$

אינה:

$$\neg P \Rightarrow \neg Q$$

(זו טעות נפוצה!)

אלא היא השילוב של P שמתקיים ו- Q שאינו מתקיים, כלומר:

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$$

הסבר מילולי:

הטענה $P \Rightarrow Q$ אומרת: "אם P נכון, אז גם Q נכון". כדי לשלול אותה, עלינו למצוא מצב שבו היא לא נכונה; כלומר מצב שבו P נכון אבל Q לא נכון.

שקילות ($\Leftrightarrow$) - פירוש: אם ורק אם.

• פירוש: $P \Leftrightarrow Q$ אמת רק כאשר שני הפסוקים P, Q בעלי אותו ערך אמת; שניהם אמת או שניהם שקר.

טבלת אמת:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

טכניקות הוכחה

א. 1.3. תבניות הוכחה

הערה פורמלית

לסיכום, נציג מספר תבניות הוכחה שברובן כבר השתמשנו, ונשתמש עוד הרבה לאורך הקורס.

טענת לכל

תזכורת (מההרצאה)

טענת לכל, היא טענה בה נדרש להוכיח או להפריך שכל אובייקט שמקיים את תכונה p מקיים את תכונה q . למעשה, טענת לכל היא טענת גרירה: אם אובייקט מקיים את תכונה p אז הוא מקיים את תכונה q .
אם נרצה להוכיח את הטענה, נקח אובייקט כללי, ונניח שהוא מקיים רק את תכונה p , ונראה שמכך נובע שהוא מקיים את תכונה q . חשוב מאוד להזהר לא להניח הנחות נוספות לגבי האובייקט. אם נרצה להפריך טענת לכל, נדרש למצוא דוגמה לאובייקט אשר מקיים את תכונה p אך לא מקיים את תכונה q . מספיק שמצאנו דוגמה אחת כזו, כדי להוכיח שטענת ה-"לכל" איננה נכונה.

הוכיחו כי: $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 2) \Rightarrow (x^2 > 4)$

פתרון

יהי $x \in \mathbb{R}$ כך ש- $x > 2$. מכיוון ש- x חיובי, נוכל לכפול את שני אגפי האי-שוויון ב- x מבלי לשנות את כיוונו:

$$x \cdot x > 2 \cdot x$$

ולכן:

$$x^2 > 2x$$

מכיוון ש- $x > 2$, נובע גם ש- $2x > 4$. לפי כלל המעבר של אי-שוויון מתקבל:

$$x^2 > 4$$

לכן:

$$(x > 2) \Rightarrow (x^2 > 4)$$

ומכיוון ש- x היה שרירותי, נקבל:

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x > 2) \Rightarrow (x^2 > 4)$$

הוכיחו בשלילה: אם $A \setminus B = \emptyset$, אז $A \subseteq B$.**פתרון**

נניח $A \setminus B = \emptyset$, ונניח בשלילה ש- $A \not\subseteq B$. אז קיים $x \in A$ כך ש- $x \notin B$, ולכן $x \in A \setminus B$. זו סתירה לכך שהפרש ריק. לכן $A \subseteq B$.

הפריכו בעזרת דוגמה נגדית: לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $x^2 > x$.**פתרון**

הטענה אינה נכונה, $x = 1/2$ כי:
 $(1/2)^2 = 1/4 < 1/2$